



***Facultad  
de  
Ciencias***

**ANÁLISIS POR CUANTIFICACIÓN DE  
RECURRENCIAS EN SEÑALES DE LA  
MÁQUINA LINEAL DE PLASMA DE  
SANTANDER  
(RECURRENCE QUANTIFICATION ANALYSIS  
IN SIGNALS OF THE SANTANDER LINEAR  
PLASMA MACHINE)**

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al

**GRADO EN FÍSICA**

Autor: Víctor Mariscal Guerra

Director: José Ángel Mier Maza

Junio - 2021

## Agradecimientos

Primeramente, quería dar las gracias a mi tutor, José Ángel Mier Maza, por su disponibilidad e interés. He podido establecer contacto con él todas las semanas de este segundo cuatrimestre de 2021 y siempre que lo he necesitado ha estado disponible para cualquier tipo de duda, hechos que han sido de una gran ayuda. También quería dar las gracias a la facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria por darme la oportunidad de recibir la formación impartida en la grado de Física. Finalmente, agradecer a mi familia el esfuerzo realizado durante los últimos años para que fuera capaz de estudiar lo que realmente me motivaba.

# Resumen

Se ha realizado un estudio de los distintos tipos de transporte que tienen lugar en plasmas no térmicos. Primeramente este trabajo establece un contexto de la física que rige la fusión nuclear a día de hoy, haciendo especial hincapié en las características en las que se desarrolla el plasma y en el problema del confinamiento. Entonces, se introduce la herramienta utilizada para estudiar las correspondientes señales, que es el análisis por cuantificación de recurrencias<sup>1</sup>. Dentro de este apartado, se explican los fundamentos matemáticos que la sostienen, en qué consiste y cómo se utiliza. Una vez conocida la herramienta de análisis, se han resuelto numéricamente los atractores de Lorenz y de Rössler mediante métodos de Runge-Kutta y se ha aplicado computacionalmente esta técnica de análisis para realizar varios diagnósticos. Como consecuencia, se han representado sus correspondientes trayectorias en un espacio tridimensional y se han obtenido los *plots* de recurrencia para analizar la periodicidad de estos. Esta técnica ha dado cuenta de las diferencias en los parámetros que se estipularon y también se ha consolidado como una herramienta fiable para hallar la dimensión de embebido óptima. Finalmente, se ha llevado esta herramienta al análisis de señales de la máquina lineal de plasma de la Universidad de Cantabria. Se ha procedido a analizar el flujo para distintas posiciones radiales, observando que éste disminuía con la distancia radial. A continuación, se han representado los *plots* de recurrencia para las distancias más representativas y a partir de estos se han calculado el determinismo y la laminaridad. Así, se ha concluido que el exterior del plasma está dominado por un transporte difusivo y el interior probablemente por una mezcla entre los canales de transporte turbulento y difusivo.

**Palabras claves:** plasma, fusión nuclear, recurrencia, determinismo, laminaridad, turbulencia, difusión, Lorenz, Rössler, dimensión de embebido, tiempo de retardo, umbral.

---

<sup>1</sup>Recurrence Quatification Analysis (RQA)

# Abstract

A study has been carried out of the different types of transport that take place in non-thermal plasmas. First of all, this work establishes a context of the physics that governs nuclear fusion today, with special emphasis on the characteristics in which plasma develops and on the problem of confinement. Then, the tool used to study the corresponding signals is introduced, which is the analysis by quantification of recurrences. Within this section, the mathematical foundations that support it, what it consists of and how it is used are explained. Once the analysis tool was known, the Lorenz and Rössler attractors have been numerically solved using Runge-Kutta methods and this analysis technique has been applied computationally to perform various diagnoses. As a consequence, their corresponding trajectories have been represented in a three-dimensional space and the recurrence plots have been obtained to analyze their periodicity. This technique has accounted for the differences in the parameters that were stipulated and has also established itself as a reliable tool to find the optimal embedding dimension. Finally, this tool has been taken to the analysis of signals from the linear plasma machine at the University of Cantabria. The flux was analyzed for different radial positions, observing that it decreased with radial distance. Next, the recurrence plots for the most representative distances have been represented and from these the determinism and laminarity have been calculated. Thus, it has been concluded that the exterior of the plasma is dominated by diffusive transport and the interior probably by a mixture between the turbulent and diffusive transport channels.

**Keywords:** plasma, nuclear fusion, recurrence, determinism, laminarity, turbulence, diffusion, Lorenz, Rössler, embedding dimension, time delay, threshold.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Teoría . . . . .	6
1.2. Plasmas . . . . .	8
1.3. Problemas en la física de plasmas . . . . .	10
<b>2. Análisis por cuantificación de recurrencias</b>	<b>15</b>
2.1. <i>Plots</i> de recurrencia . . . . .	15
2.2. Trayectoria en el espacio de fases . . . . .	18
2.3. Parámetros . . . . .	20
2.3.1. Elección del umbral . . . . .	20
2.3.2. Dimensión de embebido . . . . .	21
2.3.3. Tiempo de retardo . . . . .	23
<b>3. Señales sintéticas</b>	<b>25</b>
3.1. Atractor de Lorenz . . . . .	26
3.2. Atractor de Rössler . . . . .	29
<b>4. Señales experimentales de la máquina lineal de plasma de Santander</b>	<b>32</b>
4.1. Dispositivo experimental . . . . .	32
4.2. Análisis de señales . . . . .	34
<b>5. Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>
<b>A. Código</b>	<b>46</b>
A.1. Código principal . . . . .	46
A.2. Implementaciones en Matlab . . . . .	54
A.2.1. <i>Plot</i> de recurrencia . . . . .	54
A.2.2. Resolución numérica del atractor de Lorenz . . . . .	55
A.2.3. Resolución numérica del atractor de Rössler . . . . .	57

# Capítulo 1

## Introducción

Desde tiempos inmemorables, el ser humano plantea rutinas, es decir, que repite acciones una y otra vez a lo largo de sus días. Al igual que el ser humano, el universo plantea un gran número de ciclos: los planetas giran alrededor de las estrellas continuamente, el agua cae del cielo en forma de precipitaciones para luego evaporarse mediante la acción del Sol y volver a caer de nuevo, las mareas cambian cada 6 horas y vuelven a su tendencia original cada 12. . . Todas estas acciones son periódicas y por cada vez que se vuelve a la situación original se tiene una recurrencia.

### 1.1. Teoría

La recurrencia constituye la principal característica de los sistemas dinámicos, ya que las características de las recurrencias de un sistema describen las propiedades de éste. La herramienta matemática de la que se parte es el teorema de Poincaré, desarrollado en 1890. Éste enuncia que para un sistema conservativo, su trayectoria acabará por volver a las cercanías de cualquier punto inicial con probabilidad 1. Su demostración es la siguiente.

Sea  $T$  una transformación que preserva la medida de un espacio de probabilidad  $(\chi, \mu)$  y sea  $\mathcal{A} \subset \chi$  un conjunto medible. Entonces para cualquier número natural  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\mu(\{x \in \mathcal{A} / T^n(x)_{n \geq N} \setminus \mathcal{A}\}) = 0 \quad (1.1)$$

Reemplazando  $T$  por  $T^n$  en la ecuación anterior, se encuentra que es suficiente probar el enunciado para  $N=1$ . El conjunto:

$$\overline{\mathcal{A}} := \{x \in \mathcal{A} / T^n(x)_{n \geq 1} \setminus \mathcal{A}\} = \mathcal{A} \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(\chi \setminus \mathcal{A}) \right) \quad (1.2)$$

es medible. Hay que hacer notar que:

$$T^{-n}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \overline{\mathcal{A}} = \emptyset \quad (1.3)$$

para cada  $n$ , porque si se supone, por el contrario, que  $T^{-n}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \overline{\mathcal{A}} = B$  con  $B \neq \emptyset$ , esto implica  $T^n(B) \subset \overline{\mathcal{A}}$ . Esto es inconsistente con la definición de  $\overline{\mathcal{A}}$  porque  $B \subset \mathcal{A}$ .

También es de resaltar que:

$$T^{-n}(\overline{\mathcal{A}}) \cap T^{-m}(\overline{\mathcal{A}}) = \emptyset \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

Porque si se asume, por el contrario, que  $T^{-n}(\overline{\mathcal{A}}) \cap T^{-m}(\overline{\mathcal{A}}) = B$  con  $B \neq \emptyset$ , esto implica  $T^n(B) \subset \overline{\mathcal{A}}$ . Sin pérdida de generalidad, se asume que  $m > n$ . Entonces  $T^n(B) = C \subset \overline{\mathcal{A}}$  y  $T^m(B) = T^{m-n}(T^n(B)) = T^{m-n}(C) \subset \overline{\mathcal{A}}$ , que es de nuevo inconsistente con la definición de  $\overline{\mathcal{A}}$ .

Yendo un paso más allá,  $\mu(T^{-n}(\overline{\mathcal{A}})) = \mu(\overline{\mathcal{A}})$  desde que  $T$  preserva  $\mu$ . Entonces  $\mu(\overline{\mathcal{A}}) = 0$  porque:

$$1 = \mu(\chi) \geq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\overline{\mathcal{A}})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(\overline{\mathcal{A}})) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\overline{\mathcal{A}}) \quad (1.5)$$

Esto significa, que si tenemos una medida que preserva la transformación, la trayectoria acabará por volver a la vecindad de cualquier punto anterior con toda seguridad [19].

Una reflexión importante de este teorema se da en la referencia [1]: “Lo que el teorema de la recurrencia significa es que cualquier sistema dinámico con una cantidad fija de energía y confinado a un volumen finito, tendrá que regresar, tras un tiempo lo suficientemente grande, a un estado arbitrariamente próximo a su estado inicial. Este resultado contradice directamente las hipótesis en las que se basa la mecánica estadística, por ello es conocido como la paradoja de la recurrencia, pues la mecánica estadística presupone el comportamiento puramente aleatorio en la dinámica, al menos en el límite de tiempos muy grandes, en sistemas de muchos cuerpos en directa contradicción con algo que es muy parecido al comportamiento periódico”. Más adelante se explica la solución a esta contradicción: “Para entender mejor la naturaleza de esta supuesta paradoja recurramos a un ejemplo específico: Imaginen una caja que contenga tanto a un gas como a un espacio vacío separado del gas por una pared, como ilustra en la Fig.6. Si perforamos la pared el gas escapará, según es experiencia común; pero el teorema de la recurrencia nos asegura que de esperar el tiempo apropiado el gas se reincorporará espontáneamente a su estado original. Dicho en términos cotidianos, un pequeño agujero en un tanque de gas no debiera ser motivo de preocupación ya que bastará que esperemos un tiempo,  $T_r$ , para que el gas perdido en la atmósfera ¡se acumule de nueva cuenta en el tanque! Se podría argüir que nunca se ha observado tal cosa.

Entonces, ¿cómo resolver esta aparente contradicción entre lo que observamos cotidianamente y el resultado de Poincaré? Bástenos para ello recurrir a cálculos aproximados que se han realizado del tiempo de recurrencia para percatarnos de que una situación genérica, como el ejemplo del tanque estacionario,  $T_r$  es de aproximadamente  $10^{30}$  años, tiempo que es mucho mayor que los  $10^{10}$  años de la edad del universo”. Es decir, la hipótesis de la mecánica estadística es formalmente errónea, pero como el tiempo de recurrencia de un sistema cotidiano es mayor que la edad del universo, se puede establecer una naturaleza aleatoria.

## 1.2. Plasmas

El plasma es conocido como el cuarto estado de la materia por detrás del sólido, líquido y gaseoso. Es muy similar al estado gaseoso, pero con la particularidad de que está fuertemente ionizado y con aproximadamente el mismo número de cargas libres positivas y negativas. Esta singularidad convierte a los plasmas en excelentes conductores eléctricos y abre la posibilidad de establecer fácilmente corrientes eléctricas que interactúan con campos magnéticos aplicados y con los propios generados por tales corrientes. De esta forma, cuando los campos magnéticos y eléctricos fluctúan, estos agregados desarrollan las denominadas ondas de plasmas, que constituyen el transporte de partículas y campos que se propagan de forma periódica. Todos los plasmas emiten luz, de forma que son fácilmente detectables y además constituyen el 99.9% de la materia observable del universo: medio interestelar, atmósferas planetarias... [7]. Sin embargo, en lugares densos y fríos como la Tierra son muy escasos por la tendencia a la recombinación con cargas libres [9].

Generalmente, los plasmas se pueden clasificar en plasmas térmicos y no térmicos. Los primeros, también conocidos como plasmas calientes, se caracterizan porque la temperatura de las especies pesadas, como iones, átomos y moléculas, y la de los electrones libres es la misma, es decir, existe equilibrio termodinámico. Estos plasmas están presentes en el interior de las estrellas y en los reactores de fusión termonuclear. Por el contrario, los plasmas no térmicos, también conocidos como plasmas fríos, se basan en justamente lo contrario: la temperatura de las especies pesadas es completamente diferente a la de los electrones libres. Este hecho tiene lugar así porque el enfriamiento de los iones y las partículas sin carga es más efectivo que la energía que se transfiere por las colisiones de los electrones libres. Este tipo de plasmas es el que aparece en máquinas lineales como la utilizada en este trabajo [21]. En la actualidad, los plasmas constituyen un gran foco de estudio en física nuclear y astrofísica. La principal razón es que para que se produzca un número considerable de reacciones de fusión se debe alcanzar una temperatura de millones de grados Kelvin. A estas temperaturas, la materia se presenta en un estado gaseoso extremadamente energético de forma que los



núcleos y los electrones se disocian formando plasmas.

Uno de los problemas que surgen a la hora de tratar con plasmas consiste en ser capaz de mantener de forma controlada una cierta cantidad de este durante un determinado espacio de tiempo en un cierto volumen en las condiciones de densidad y temperatura necesarias para las aplicaciones (fusión nuclear). Este proceso se conoce como el confinamiento del plasma. En las estrellas, el plasma es confinado debido a las inmensas fuerzas gravitatorias producidas por la masa que estas tienen. En cambio, en la Tierra no es tan sencillo reproducir estas condiciones para producir energía por fusión nuclear. Para empezar, las temperaturas a las que se someten los plasmas hacen inviable que entren en contacto con ningún sólido, ya que éste se sublimaría y el plasma se enfriaría. Hoy día se han llevado a cabo con éxito dos diseños: confinamiento inercial y confinamiento magnético. El confinamiento inercial intenta obtener las condiciones necesarias para que se produzca la fusión nuclear utilizando la radiación de láseres de alta energía o de haces atómicos que inciden sobre pequeñas cápsulas que contienen deuterio y tritio. En otras palabras, se pretende dotar a las partículas que forman el combustible del momento necesario para que al chocar entre sí se venza la barrera de Coulomb y se produzca la reacción de fusión nuclear. El desafío de esta técnica consiste en lograr una iluminación uniforme y suficientemente potente con una alta frecuencia de repetición. Por otro lado, el confinamiento magnético consiste en atrapar un plasma en una cámara toroidal mediante el uso de campos magnéticos [8]. Este modo de retener un plasma se basa en el fenómeno físico por el cual las partículas del plasma orbitan alrededor de las líneas de campo magnético. Si el campo magnético es suficientemente grande y las líneas de campo magnético forman superficies cerradas, los iones y los electrones permanecen confinados hasta que chocan con otra partícula. Este fundamento es utilizado en los tokamaks y en los stellarators [12].

Tanto tokamaks como stellarators son configuraciones diseñadas para confinar magnéticamente un plasma y obtener así reacciones de fusión nuclear de forma controlada. En el caso de los tokamaks se utiliza un campo magnético generado por una corriente alterna que se induce en el plasma. Mientras, en un stellarator se obtiene el confinamiento magnético mediante un campo magnético poloidal generado por bobinas exteriores al plasma. Los tokamaks por su parte tienen un diseño más simple y han dado resultados más prometedores, pero son más inestables.

Para modelizar el comportamiento de un plasma, es lógico entenderlo como un fluido y en la actualidad se tiende a usar la descripción magneto-hidrodinámica (MHD). Dentro del confinamiento de plasmas, uno de los grandes problemas es que el equilibrio magneto-hidrodinámico no es estable y se tiende a llegar al equilibrio termodinámico (la temperatura del plasma disminuye). Es decir, que si por distintas razones hay una ligera perturbación del equilibrio, se origina un transporte de calor a través de modos normales que desestabilizan

el plasma generando transporte radial de partículas y energía. Éstas pueden ser derivadas por distintas causas: cinéticas, inestabilidades de flujo, Rayleigh-Taylor y universales [8].

### 1.3. Problemas en la física de plasmas

Como se ha dicho, los plasmas constituyen el elemento clave para obtener energía por fusión nuclear. El completo entendimiento de éstos permitirá la obtención de una energía que se lleva persiguiendo durante más de 80 años. La fusión nuclear consiste en una reacción por la que dos núcleos más ligeros que el hierro; generalmente el hidrógeno y alguno de sus isótopos (deuterio, tritio), se unen formando un núcleo más pesado y liberan energía. El motivo por el que se escogen núcleos más ligeros que el del hierro se observa en la siguiente imagen.

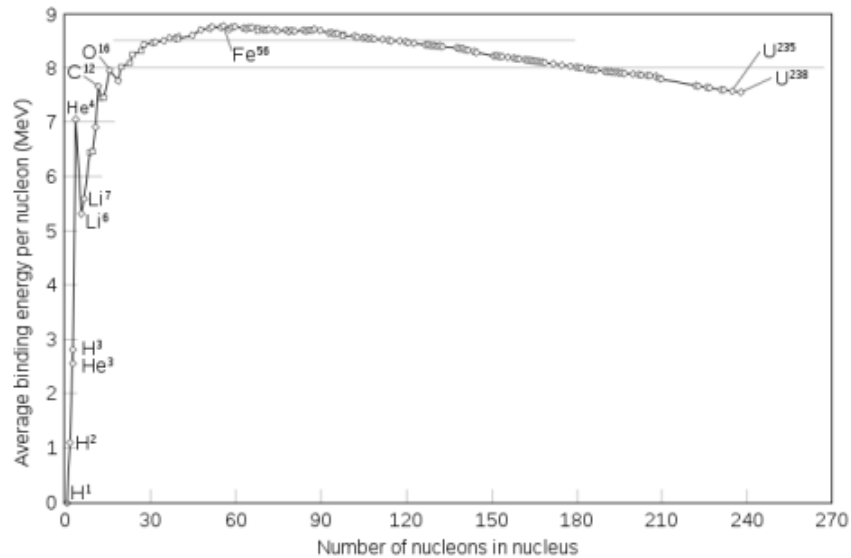


Figura 1.1: Energía de enlace por nucleón para los núcleos atómicos conocidos.

El hierro marca el elemento con la máxima energía de enlace. A partir de este núcleo atómico la energía de enlace decrece. Si el núcleo resultante tiene una energía de enlace mayor que el de los reactivos, se liberará energía. Esto tiene lugar así porque la energía de enlace es la diferencia entre la masa de un elemento y la suma de los nucleones que lo forman, todo ello dividido por el número de nucleones. Cuanto mayor es esta cantidad, mayor masa pierde cada nucleón al unirse al resto. De esta forma, pasar de ciertos núcleos a núcleos con una energía de enlace mayor provoca que los nucleones de los productos pierdan masa al formar el núcleo con respecto a los núcleos reactivos. Esta diferencia de masa constituye la energía liberada. Por ello es preferible tener núcleos ligeros, porque la diferencia de masas es más significativa. En el caso de que se pasase a núcleos con una energía de enlace menor, los

nucleones deberían ganar masa y por lo tanto no se liberaría energía sino que se debería de suministrar [14].

De esta forma, la reacción de fusión nuclear que se desea reproducir es la siguiente:



Donde  ${}^2_1H$  es el deuterio,  ${}^3_1H$  es el tritio y el núcleo  ${}^4_2He$  es conocido como partícula alfa. La principal razón de que se haya escogido esta reacción es que es la que tiene una sección eficaz de fusión más grande y a una temperatura más baja de todas las posibles.

Los motivos por los que se persigue este tipo de energía con tanto ahínco son varios. La energía por fusión nuclear constituye una energía limpia que no produce gases nocivos y que genera residuos de baja actividad. Ésta constituye una fuente inagotable para la vida humana ya que el deuterio es uno de los elementos más abundantes en la naturaleza (0.015 %). Además, la central estándar de fusión nuclear se conformaría como una de las más seguras porque la reacción se detiene al cortar el suministro de combustible [13].

El principal problema de la fusión nuclear del hidrógeno es el mecanismo de control. Se quiere controlar a escala nuclear un plasma durante un tiempo de exposición prolongado y ello supone de una gran complejidad. En realidad, este objetivo se puede conseguir; el verdadero problema es ser capaz de reproducirlo haciendo uso de una energía menor de la que se obtiene a cambio. Para el óptimo funcionamiento de un reactor de fusión, se han de producir 2 etapas: el *breakeven* (punto de equilibrio) y la ignición. El primero hace referencia a que la energía de las partículas alfa producidas ha de igualar la energía externa del calentamiento del plasma. Si por alguna razón se interrumpiese el calentamiento adicional, también se pararían las reacciones de fusión. La ignición es el proceso en el que las reacciones de fusión ya se encuentran tan avanzadas como para que el calentamiento adicional ya no sea necesario para que estas se mantengan.

Actualmente se ha establecido el criterio de Lawson como la condición que se ha de cumplir para que la energía obtenida por el plasma sea igual a la que se debe suministrar:

$$n \cdot \tau_e > 3 \cdot 10^{19} \text{ s} \cdot \text{m}^{-3} \quad (1.7)$$

Donde  $n$  es la densidad del combustible y  $\tau_e$  es el tiempo de confinamiento del plasma. Sin embargo, para que el plasma produzca la energía necesaria como para mantenerse a la temperatura requerida, es decir, se produzca la ignición, se requiere un parámetro 7 veces mayor al de Lawson:

$$n \cdot \tau_e > 2 \cdot 10^{20} \text{ s} \cdot \text{m}^{-3} \quad (1.8)$$

Conseguir confinamientos de plasma durante tiempos prolongados no solo es necesario para obtener la ignición, sino que también es preciso para evitar la fuga de partículas tan energéticas que choquen contra las paredes del reactor, dañándolas y reduciendo su rendimiento. Llevar a la práctica esta técnica conlleva de una gran complejidad. La razón no es únicamente disponer de grandes campos magnéticos, sino también tratar las grandes diferencias de densidad y temperatura que existen entre el centro y los bordes del plasma. Estas diferencias son la causa que no exista equilibrio termodinámico (aunque sí equilibrio magneto-hidrodinámico) y las responsables de que se originen distintos mecanismos de transporte [14].

Con el objetivo de intentar evitar estos medios de transporte, es de importancia categórica conocer y entender cada uno de estos mecanismos. Actualmente, se han catalogado 2 tipos: transporte difusivo y transporte turbulento.

El transporte difusivo tiene un origen clásico. Está basado en las colisiones elásticas entre las distintas partículas, estableciendo que el transporte de partículas y de energía es difusivo. La ley de Fick rige este proceso. Ésta establece que los flujos de partículas y de calor son proporcionales a sus correspondientes gradientes. Esta relación se establece a partir de un coeficiente de proporcionalidad, que es el coeficiente de difusión,  $D$ , en el caso del flujo de partículas y la conductividad térmica,  $k$ , en el caso del flujo calorífico:

$$\Gamma = -D \cdot \nabla n \quad (1.9)$$

$$Q = -k \cdot \nabla T \quad (1.10)$$

Como el plasma está totalmente ionizado, las interacciones entre partículas son de origen coulombiano. De esta forma, la escala de longitud típica para el campo magnético dado es el llamado radio de Larmor;  $\Delta d \sim \rho L$ , y el tiempo característico es la inversa de la frecuencia de colisión;  $\Delta t \sim v^{-1}$ . El radio de Larmor es simplemente el radio de giro de las partículas cargadas alrededor de las líneas de campo magnético;  $r = mv(qB)^{-1}$ . Como el reactor tiene una morfología toroidal y el campo magnético no es del todo homogéneo, las líneas de campo son cuasi-helicoidales. En un sistema de campo toroidal, la curvatura y el gradiente del módulo del propio campo provocan que aparezcan separaciones de cargas que inducen derivas hacia el exterior, de forma que en esta configuración existen pérdidas intrínsecas [15].

Al estudiar un plasma se observa un transporte mayor que el realizado por la difusión. Esta componente anómala se corresponde con la turbulencia, que consiste en el fenómeno que surge cuando la velocidad del fluido supera un umbral. El plasma de los reactores no se encuentra en equilibrio termodinámico lo que da lugar a gradientes de temperatura, de densidad y de presión. Como consecuencia, tiene lugar la turbulencia por la excitación de varios modos

normales del sistema. Estos modos utilizan la energía libre presente en algunas superficies magnéticas. La turbulencia se escenifica en forma de vórtices sobre estas superficies, que son el producto de la interacción entre los modos excitados que se fusionan para formar estructuras rotantes [16].

Para modelizar el transporte de las partículas de un plasma, se realiza un ajuste del desplazamiento cuadrático medio:

$$\langle |x - x_0|^2 \rangle = A \cdot t^{2H} \quad (1.11)$$

Donde  $A$  es el coeficiente de difusión y  $H$  es el parámetro que explica el tipo de transporte difusivo que se tiene.

1. Para  $H=0.5$  se tiene un transporte que es lineal con el tiempo y por lo tanto, es un transporte difusivo corriente.
2. Para  $H<0.5$  se tiene un transporte subdifusivo.
3. Para  $H>0.5$  se tiene un transporte superdifusivo.
4. Para  $H=1$  se tiene un transporte que escala con el cuadrado del tiempo, conocido como transporte balístico. Este tiene trayectorias lineales en las que no se pasa por puntos previamente recorridos y es difícil de ver.

En cuanto al transporte turbulento, puede tener lugar tanto en transportes subdifusivos como superdifusivos. El hecho de que el transporte turbulento pueda tener lugar con transporte subdifusivo es difícil de asimilar teniendo en cuenta que el transporte turbulento escala con un orden de tiempo generalmente mayor que la unidad. La idea clave es que realizando el ajuste de este transporte (subdifusivo+turbulento) se encuentra un coeficiente de difusión considerablemente mayor que el obtenido para un transporte superdifusivo.

Un objetivo a la orden del día es el de eliminar el transporte turbulento dentro de los reactores de fusión nuclear. La razón es que degrada el confinamiento del plasma. La trayectoria de un plasma dominado por transporte turbulento está ejemplificada en la siguiente figura.

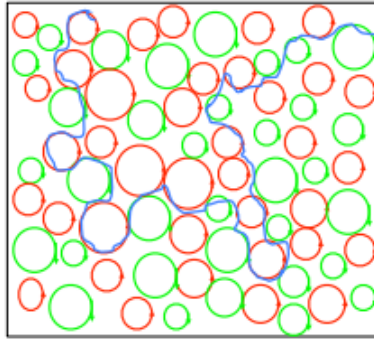


Figura 1.2: Ejemplo del transporte de partículas en un plasma dominado por el transporte turbulento.

Los radios de estos vórtices son significativamente mayores que los denominados radios de Larmor, dados únicamente en un transporte difusivo. Cuando las partículas pasan por la zona del radio más cercana al exterior del detector, se ven empujadas hacia dentro por el campo magnético, pero también empujadas hacia fuera por los gradientes de temperatura y densidad presentes. Como el transporte turbulento escala con un potencia mayor del tiempo que la difusión o en su defecto, tiene un coeficiente de difusión más grande, se pretende de forma prioritaria eliminar este tipo de transporte. En el caso subdifusivo, el transporte escala con la raíz del tiempo, lo que es un factor razonablemente asumible, pues bastaría con agrandar lo suficiente las paredes del detector.

# Capítulo 2

## Análisis por cuantificación de recurrencias

Ésta es una técnica de análisis de datos cuyo objetivo es modelizar sistemas dinámicos no lineales. Su funcionamiento consiste básicamente en reconstruir el espacio de fases de una señal escalar y analizar la recurrencias que tienen lugar en éste.

### 2.1. *Plots* de recurrencia

Con el citado contexto matemático, en 1987, muy unido al desarrollo del poder computacional, Eckman, Kamphorst y Ruelle introdujeron los *plots* de recurrencia iniciando así el método de análisis por cuantificación de recurrencia. La idea principal de este proceso consiste en caracterizar sistemas dinámicos a partir del estudio de las recurrencias que tienen éstos. Para entender la función de los *plots* de recurrencia, es útil dar un ejemplo. Se supone una trayectoria de un sistema en un espacio matemático arbitrario. A cada instante, la trayectoria posee un vector que apunta en la dirección de movimiento, de forma que la trayectoria final se conforma como una serie de vectores en tal espacio matemático. Entonces, el correspondiente *plot* de recurrencia está basado en la siguiente matriz de recurrencia:

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1 & \vec{x}_i \approx \vec{x}_j \\ 0 & \vec{x}_i \not\approx \vec{x}_j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

Donde  $N$  es el número de estados considerados y  $\vec{x}_i \approx \vec{x}_j$  significa que la trayectoria del sistema pasa lo suficientemente cerca de cualquier punto de la trayectoria anterior como para considerarse recurrente. En estas gráficas se representa la forma final de esta matriz pintando donde hay unos y dejando en blanco donde hay ceros, siendo las variables de los

ejes coordenados el tiempo frente al tiempo. Como es evidente, en la diagonal de la matriz se tiene  $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ , por lo que en estas representaciones siempre va a haber una línea diagonal formando  $45^\circ$  con los ejes de abcisas y de ordenadas. También merece la pena resaltar que los subíndices  $i, j$  se consideran intercambiables y que por lo tanto, la representación va a ser totalmente simétrica respecto a la línea diagonal. Realmente solo se observa una de las dos partes respecto a la línea diagonal ya que uno de los tiempos es el de referencia (tiempo anterior) y el otro es lo que se tarda en el futuro en alcanzar la recurrencia (tiempo posterior), de forma que uno es siempre mayor que el otro. Sin embargo, con el objetivo de poder intercambiar los ejes a nuestro antojo se considera simétrico respecto a la línea diagonal y de esta manera no hay confusión a la hora de representar.

Cuando se haya llegado a una recurrencia;  $\vec{x}_i \approx \vec{x}_j$ , se tiene un 1 en la matriz de recurrencia en la posición  $(i, j)$ . Como resultado, en la gráfica se representa un punto en esa coordenada. De esta forma, los sistemas dinámicos presentan líneas diagonales, líneas verticales o simplemente puntos no alineados. Un sistema periódico refleja diagonales largas y separadas una misma distancia, ya que en cada período repite exactamente el mismo proceso. Así se refleja en la *Figura 2.1*. Un sistema aleatorio presenta una cierta cantidad de puntos no alineados y sin ningún orden aparente. Así se refleja en la *Figura 2.2*.

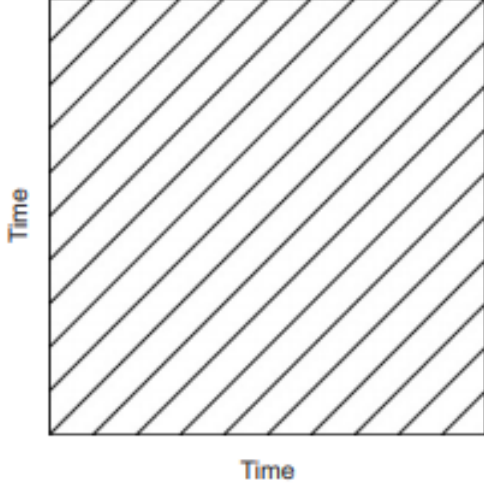


Figura 2.1: *Plot* de recurrencia de un sistema periódico.

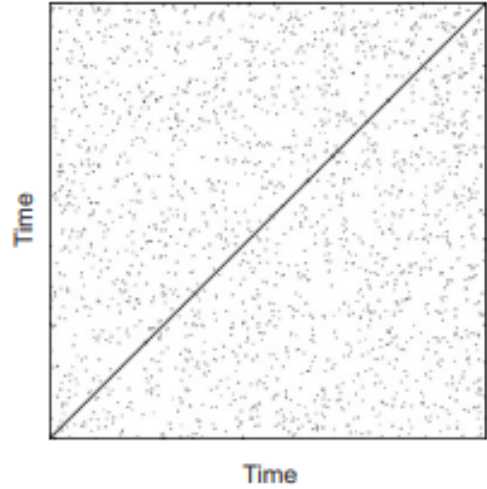


Figura 2.2: *Plot* de recurrencia de un sistema aleatorio.

En cuanto a la densidad de recurrencias, la medida más simple del análisis por cuantificación de recurrencias es la tasa de recurrencia (RR).

$$RR(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}(\varepsilon) \quad (2.2)$$



Donde  $\varepsilon$  se corresponde con el umbral considerado. Ésta magnitud mide la densidad de puntos recurrentes en un *plot* de recurrencia.

En lo referente a las líneas diagonales y verticales de los *plots* de recurrencia, las 5 propiedades que se han considerado como más importantes son: el determinismo, la media de la longitud diagonal, la laminaridad, la media de la longitud vertical y la entropía.

- El determinismo se define como el cociente del número de puntos recurrentes en las líneas diagonales entre todos los puntos recurrentes. Matemáticamente se expresa como:

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l \cdot P(l)}{\sum_{l=1}^N l \cdot P(l)} \quad (2.3)$$

Se requiere un valor mínimo de la longitud de estas líneas a partir del cual se consideran líneas diagonales. Si el valor de esta propiedad es cercano a la unidad el comportamiento es determinista y si es cercano a cero la dinámica está dominada bien por un comportamiento aleatorio o por un estado en reposo.

- La media de la longitud diagonal se expresa como:

$$ADL = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l \cdot P(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P(l)} \quad (2.4)$$

Esta propiedad estima el tiempo medio que dos segmentos de la trayectoria están cerca el uno del otro. Puede ser interpretado como el tiempo de predicción medio.

- La laminaridad se define como la razón del número de puntos recurrentes formando líneas verticales y el número total de puntos recurrentes. Matemáticamente se expresa como:

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N v \cdot P(v)}{\sum_{v=1}^N v \cdot P(v)} \quad (2.5)$$

De nuevo, se necesita un valor mínimo de la longitud de estas líneas a partir del cual se consideran líneas verticales. La laminaridad cuantifica los estados que no varían mucho en el tiempo [2].

- La media de la longitud vertical se expresa como:

$$AVL = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N v \cdot P(v)}{\sum_{v=v_{min}}^N P(v)} \quad (2.6)$$

Esta propiedad estima el tiempo medio que el sistema se queda atrapado en un sistema o que simplemente permanece en un estado específico.

- La entropía se refiere a la entropía de Shanon de la probabilidad,  $p(l) = P(l)/N_l$ , de encontrar una línea diagonal de exactamente una longitud  $l$  en el *plot* de recurrencia. La entropía de Shanon se puede entender como la incertidumbre de una fuente de información [3]. Matemáticamente es expresa como:

$$ENTR = \sum_{l=l_{min}}^N p(l) \cdot \ln p(l) \quad (2.7)$$

La entropía refleja la complejidad del *plot* de recurrencia con respecto a las líneas diagonales.

## 2.2. Trayectoria en el espacio de fases

Hasta el momento se ha supuesto que la trayectoria del sistema está descrita en un espacio matemático cualquiera, pero el espacio más útil para describir sistemas dinámicos reales es el espacio de fases. Éste se define como la construcción que permite representar las coordenadas generalizadas y los momentos conjugados de un sistema.

Formalmente un sistema dinámico viene dado por: un espacio de fases, un tiempo continuo o discreto y por una ley de evolución temporal.

Esta ley hace referencia a una regla que permita determinar el estado del sistema a cada instante de tiempo a partir de un estado en un tiempo inicial. Para sistemas de tiempos continuos, la evolución temporal viene dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales.

En general, al tratar con medidas experimentales, se encuentra que no se puede medir directamente el vector de estado ya que no todas las componentes están disponibles. En su lugar, se obtienen series temporales de una cantidad escalar (presión, densidad, temperatura...),  $u_i = u(i\Delta t)$ , donde  $i = 1, \dots, N$ , siendo  $\Delta t$  la frecuencia de muestreo y  $N$  el número de entradas (discretas). Es decir, se pasa de un tiempo continuo a un tiempo discreto. En este caso, el espacio de fases puede ser reconstruido por el método del tiempo de retardo:

$$\vec{x}_i = \sum_{j=1}^N u_{i+(j-1)\tau} \cdot \hat{e}_j \quad (2.8)$$

Donde  $m$  es la dimensión de embebido,  $\tau$  el tiempo de retardo y  $\hat{e}_j$  son vectores unitarios ortogonales ( $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{i,j}$ ). Entonces, el *plot* de recurrencia es construido pintando la siguiente matriz de recurrencia:

$$R_{i,j}(\varepsilon) = H(\varepsilon - \|\vec{u}_i - \vec{u}_j\|) \quad i, j = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

Donde  $\varepsilon$  es el umbral considerado y  $H(\cdot)$  es la función escalón de Heaviside.

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Por ejemplo, se supone que se tiene la siguiente señal de la *Figura 2.3*.

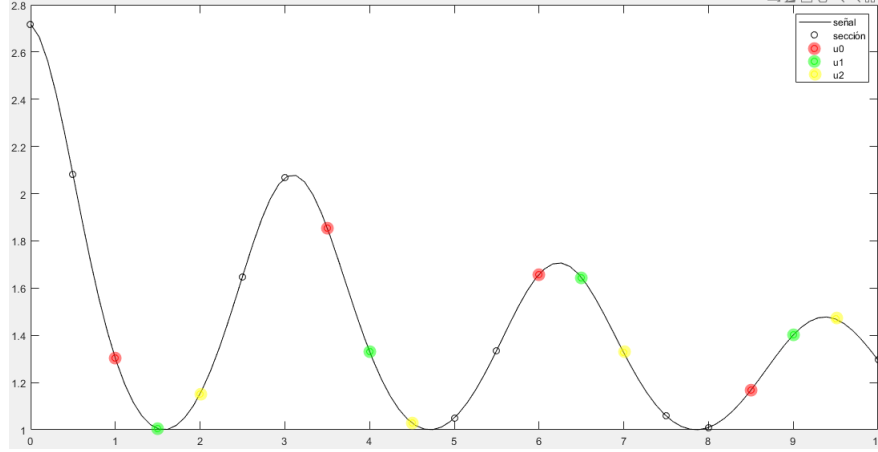


Figura 2.3: Representación gráfica de una señal teórica. La distancia entre cada par de puntos representa el intervalo suficientemente pequeño en el que se mide la señal de nuevo (sección). Los puntos rojos representan las componentes del primer vector del espacio de fases, los puntos verdes el segundo vector y los puntos amarillos el tercer vector.

Se tienen los siguientes parámetros (cogidos arbitrariamente): dimensión de embebido  $m=4$  y tiempo de retardo  $\tau=5$ . Con estos valores, se tiene que el vector que define el espacio de fases es:

$$\vec{u}_i = (u_i, u_{i+5}, u_{i+10}, u_{i+15}) \quad (2.11)$$

Así se tiene que los distintos vectores de fases son:

$$\vec{u}_0 = (1, 3.5, 6, 8.5), \vec{u}_1 = (1.5, 4, 6.5, 9), \vec{u}_2 = (2, 4.5, 7, 9.5) \quad (2.12)$$

De esta forma, se ha reconstruido el espacio de fases para esta señal como una serie de vectores:

$$\vec{x} = (\vec{u}_0, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N) \quad (2.13)$$

Entonces, haciendo la norma entre los distintos vectores y comparando con el umbral elegido se obtienen, o no, las recurrencias que interesa estudiar. Suponiendo que la norma de los dos primeros vectores anteriormente descritos sea inferior al umbral, se tiene ya un punto de recurrencia:

$$\varepsilon \geq \|\vec{u}_1 - \vec{u}_0\| \rightarrow R_{0,1}(\varepsilon) = 1 \quad (2.14)$$

Es importante hacer notar que la norma de los distintos vectores puede ser de varios tipos: euclídea,  $L_2$ ; la raíz cuadrada de la suma de las distintas componentes absolutas al cuadrado, máxima,  $L_\infty$ ; donde se coge el máximo valor del vector, y mínima,  $L_1$ ; donde se coge el mínimo valor del vector. Para los *plots* de recurrencia es normalmente utilizada la norma máxima  $L_\infty$  porque es computacionalmente más rápida y permite estudiar analíticamente algunas características..

## 2.3. Parámetros

Una vez descrita la técnica, se pasa a desarrollar el criterio que se ha de seguir para escoger los parámetros adecuados. En el enfoque de este trabajo, los parámetros más importantes son: el umbral  $\varepsilon$ , la dimensión de embebido  $m$ , y el tiempo de retardo  $\tau$ .

### 2.3.1. Elección del umbral

Este parámetro se corresponde con la distancia máxima que tiene que haber entre dos puntos de la trayectoria de un sistema dinámico para que se considere recurrencia. Un valor del umbral demasiado pequeño provocará que no existan demasiados puntos de recurrencia y por lo tanto el *plot* estará formado por la línea diagonal y por puntos muy aislados. Por otro lado, un valor excesivo causará que cada punto sea vecino de cualquier otro y el *plot* estará formado por un cuadrado prácticamente pintado por la superposición de líneas de recurrencia. Este efecto se conoce como movimiento tangencial. En resumen, la elección del umbral no es para nada arbitraria ni poco relevante, por lo que es conveniente escoger un convenio.

Una opción muy extendida consiste en escoger un porcentaje del diámetro del espacio de fases, no mayor del 10 %.

Un criterio también adecuado consiste en partir de que una medida de un proceso basada en una mezcla de señal y algo de ruido con desviación estándar  $\sigma$ . Para una amplia gama de procesos, se puede escoger que  $\varepsilon > 5\sigma$  para obtener resultados similares a los de la señal sin ruido.

Para procesos cuasi-periódicos, se pueden utilizar las líneas diagonales para encontrar un umbral óptimo. Para ello, se considera la distribución de densidad de puntos de estas líneas. De tales densidades, se cuentan el número de picos significativos,  $N_p$ , y el número medio de vecinos,  $N_n$ , que tiene cada punto. El umbral debe elegirse de tal manera que  $N_p$  sea máximo

y  $N_n$  se acerque a  $N_p$ . Entonces una buena opción para  $\varepsilon$  sería minimizar la cantidad:

$$\beta(\varepsilon) = \frac{|N_n(\varepsilon) - N_p(\varepsilon)|}{N_n(\varepsilon)} \quad (2.15)$$

Este criterio minimiza la fragmentación y la anchura de las líneas diagonales con respecto a la umbral, que puede ser útil para el ruido. Sin embargo, esta opción no tiene que preservar obligatoriamente la distribución de líneas diagonales en el *plot* de recurrencia si el ruido está presente (el umbral calculado puede ser subestimado).

Otras aproximaciones consisten en utilizar una densidad fija de puntos de recurrencia y en fijar el número de vecinos de cada punto en la trayectoria. Esta última provoca entonces un umbral diferente para cada punto. Ambas preservan la densidad de puntos de recurrencia y permiten comparar *plots* de recurrencia de sistemas diferentes sin la necesidad de normalizar las series temporales de antemano [19].

La opción de qué convenio utilizar depende en gran medida del sistema que se quiere estudiar. En el caso aquí estudiado se ha optado por elegir el umbral buscando una región de escala en la densidad de puntos de recurrencia. Es necesario tener en cuenta que si se cogen muchos puntos, el *plot* de recurrencia tendrá líneas muy gruesas y alineadas en cualquier dirección, mientras que si son pocos los puntos escogidos, la representación estará prácticamente en blanco. En ambos casos, no se está reproduciendo la realidad de forma adecuada. Por ello, es necesario coger una cantidad intermedia. La propuesta, considerada como más sensata, ha sido un umbral de manera que la densidad de puntos de recurrencia sea aproximadamente del 1-5 %. La principal desventaja de este método es que se está considerando que la densidad de puntos recurrentes es constante para cada intervalo de tiempo y esto puede resultar erróneo para sistemas con una dependencia temporal muy fluctuante.

### 2.3.2. Dimensión de embebido

Como ya se ha dicho, este es el parámetro que establece la dimensión óptima para reconstruir el espacio de fases. Ésta es la función del método del tiempo de retardo, que realiza la reconstrucción mediante un sumatorio de varios vectores con dimensión de embebido  $m$ .

La elección de un espacio suficientemente grande para representar un sistema dinámico se basa en lo siguiente: si se proyecta un objeto en una dimensión más pequeña de la adecuada muchos puntos que están lejos en tal objeto aparecen cercanos en tal proyección y por lo tanto se tienen recurrencias donde no debe haberlas.

Suponiendo el caso de una señal temporal escalar arbitraria, un embebido demasiado grande eliminará los puntos recurrentes aislados en el *plot* de recurrencia y enfatizará las estructuras

diagonales, por muy extrañas que sean las recurrencias prolongadas en una señal no correlacionada. Este hecho distorsiona el análisis de la señal, ya que éste está basado en el estudio de las líneas diagonales y verticales de los *plots* de recurrencia. Por esta razón, es importante ser cuidadosos a la hora de escoger el embebido adecuado.

Un *plot* de recurrencia con cualquier dimensión de embebido  $m$  se puede derivar de otro sin ningún embebido ( $m=1$ ). Por ejemplo, se considera  $m=2$  con un cierto tiempo de retardo  $\tau$  y una norma máxima. Un punto de recurrencia ocurrirá en  $(i, j)$  si:

$$\vec{x}_i \approx \vec{x}_j \leftrightarrow \max(|x_i - x_j|, |x_{i+\tau} - x_{j+\tau}|) < \varepsilon \quad (2.16)$$

Esto es lo mismo que sucede cuando  $\vec{x}_i \approx \vec{x}_j$  y  $\vec{x}_{i+\tau} \approx \vec{x}_{j+\tau}$  y se corresponde a dos puntos de recurrencia en  $(i, j)$  y en  $(i + \tau, j + \tau)$  pertenecientes a un *plot* de recurrencia sin embebido. Entonces, un punto de recurrencia para una trayectoria reconstruida con una dimensión de embebido  $m$  tiene lugar si:

$$R_{i,j}^{(m)} = R_{i,j}^{(1)} \cdot R_{i+\tau,j+\tau}^{(1)} \cdots R_{i+(m-1)\tau,j+(m-1)\tau}^{(1)} \quad (2.17)$$

Donde  $R^{(1)}$  es la matriz de recurrencia sin embebido y  $R^{(m)}$  es la matriz de recurrencia con embebido  $m$ . La entrada en el punto  $(i, j)$  en la matriz de recurrencia  $R^{(m)}$  consiste de información en los tiempos  $(i + \tau, j + \tau), \dots, (i + (m - 1)\tau, j + (m - 1)\tau)$ . Por ello, está claro que una señal estocástica que es embebida en un espacio de gran dimensión puede provocar líneas diagonales en el *plot* de recurrencia fingiendo un determinismo que no tiene.

La técnica aquí utilizada para determinar el embebido es el extendido algoritmo de falsos vecinos más cercanos. Este método consiste en observar los puntos que se consideran cercanos en una dimensión  $d$  y que ya no lo son en una dimensión  $d+1$ . En otras palabras, se elabora un histograma representando en el eje de ordenadas el porcentaje de puntos recurrentes “falsos” y en el eje de abscisas la dimensión de embebido. En el momento en el que el eje de embebido tenga un porcentaje de puntos recurrentes “falsos” suficientemente bajo ya se tiene la dimensión de embebido apropiada.

Para clarificar el concepto, se muestra un estudio realizado por el instituto de la ciencia no lineal de la Universidad de California. En este estudio, se aplicó el algoritmo de falsos vecinos más cercanos a 24000 puntos de las ecuaciones del atractor de Lorenz. Como resultado se obtuvo la siguiente representación:

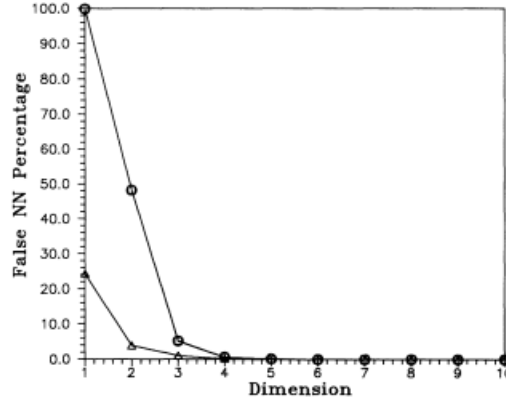


Figura 2.4: Histograma del porcentaje de vecinos falsos más cercanos frente a la dimensión. Se ha cogido un tiempo de retardo de  $\tau=11$  y un tiempo de muestreo de  $\Delta t=0.55$ .

En esta representación, se observa que una dimensión de embebido de  $m=4$  plantea un porcentaje de falsos vecinos casi nulo, de forma que es adecuada. En este histograma se plantean dos curvas correspondientes a dos criterios de este algoritmo, cuyas diferencias no tienen cabida en este trabajo [20].

### 2.3.3. Tiempo de retardo

Para la reconstrucción del espacio de fases se necesita un valor óptimo del tiempo de retardo,  $\tau$ . Para ello, se utilizan principalmente dos técnicas: la función de información mutua y la función de autocorrelación. El concepto intuitivo de la función de información mutua dice que esta función cuantifica la dependencia entre la distribución conjunta de dos variables  $Z$  y  $T$  y la que tendrían si  $Z$  y  $T$  fuesen independientes. Es decir, mide en cuánto el conocimiento de una variable reduce nuestra incertidumbre sobre la otra. Por lo tanto, si  $Z$  y  $T$  son independientes la información mutua es nula y si  $Z$  es igual a  $T$  la información mutua es toda la información de esta variable ( $Z$  o  $T$  porque son iguales) [6].

La función de autocorrelación se define como la correlación cruzada de una señal consigo misma.

Ambas técnicas se pueden utilizar para calcular el tiempo de retardo. Sin embargo, es más conveniente utilizar la primera. La segunda detecta correlaciones lineales, pero la primera es capaz de detectar tanto correlaciones lineales como no lineales.

La principal idea de esta técnica consiste en proporcionar un tiempo de retardo  $T$  de forma que dado un sistema en un momento  $t$  se proporcione nueva información acerca del estado en el tiempo  $t+T$ . Como convenio, se tiene que cuando la función de información mutua  $I(t)$  alcance su primer mínimo, se escoja este tiempo como tiempo de retardo [5].

La siguiente figura muestra un ejemplo de ruido blanco utilizado para encontrar el tiempo

de retardo adecuado [4].

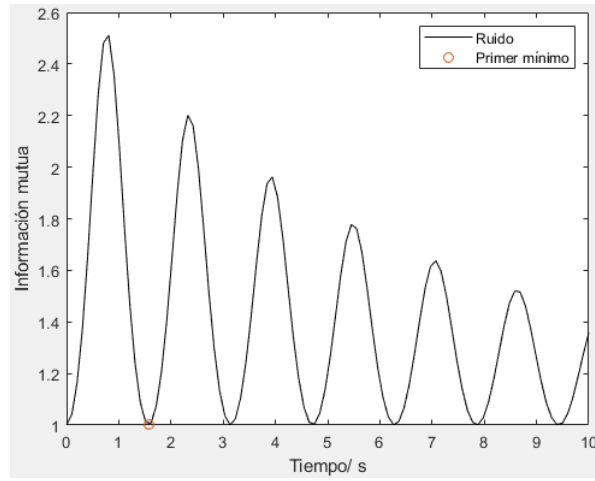


Figura 2.5: Representación de la función de información mutua frente al tiempo.

El retardo óptimo se corresponde al primer mínimo de la función, para el que se tiene  $\tau=1.58$  segundos.



# Capítulo 3

## Señales sintéticas

Actualmente una de las ramas que más preguntas lanza en el campo de la física es la dinámica no lineal. La física clásica teorizaba sobre la idea de la naturaleza lineal del universo y la posibilidad de predecir cada proceso que tiene lugar en este. Sin embargo, este postulado acabó por caer. El problema de los tres cuerpos, el movimiento de la atmósfera y los circuitos RLC son solo algunos ejemplos de sistemas caóticos. Estos sistemas se caracterizan porque un pequeño cambio en las condiciones iniciales puede provocar grandes disparidades en los resultados futuros. Es decir, estos sistemas no son directamente predecibles. Sin embargo, esto no quiere decir que no se puedan extraer métodos de análisis. Es aquí donde entra en juego la teoría de la probabilidad y de la estadística y más concretamente el estudio de sistemas complejos.

Una manera convencional para entrar en la materia del análisis por cuantificación de recurrencias consiste en analizar atractores. Un atractor es una estructura donde se observa que la aleatoriedad de un fenómeno realmente sigue un patrón ordenado de comportamiento [10]. En otras palabras, es un fenómeno hacia el que convergen las trayectorias de una cierta dinámica, que encuentran en su atractor una condición local de mínima energía [11]. Cada atractor está representado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sin solución analítica que conforma un sistema caótico. Dos de los más utilizados son el atractor de Lorenz y el de Rössler [10].

### 3.1. Atractor de Lorenz

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representa a este atractor es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cdot (y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x \cdot (b - c) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - cz \end{cases} \quad (3.1)$$

Siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  parámetros libres. Inicialmente, se han cogido los valores más extendidos:  $a=10$ ,  $b=28$  y  $c=8/3$ .

Resolviendo numéricamente este sistema se ha obtenido la trayectoria de cada coordenada a lo largo del tiempo:

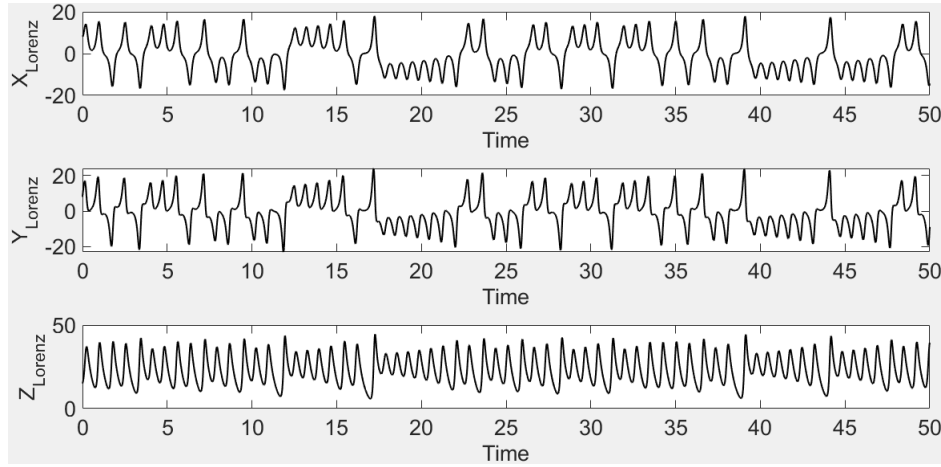


Figura 3.1: Representación de las señales temporales teóricas del atractor de Lorenz para las tres coordenadas. Se tiene como parámetros:  $a=10$ ,  $b=28$ ,  $c=8/3$  y como condiciones iniciales:  $x(0)=8$ ,  $y(0)=8$ ,  $z(0)=15$ .

Entonces, se ha obtenido la reconstrucción del espacio de fases:

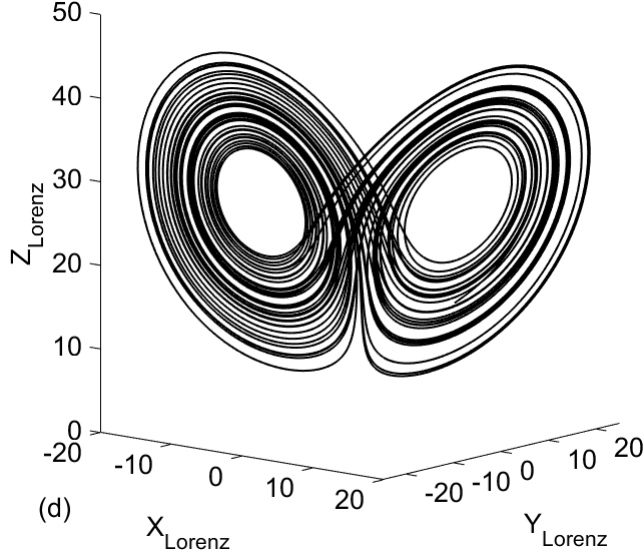


Figura 3.2: Representación de la trayectoria del atractor de Lorenz en el espacio tridimensional. Se tiene como parámetros:  $a=10$ ,  $b=28$ ,  $c=8/3$  y como condiciones iniciales:  $x(0)=8$ ,  $y(0)=8$ ,  $z(0)=15$ .

Para este sistema caótico, se observa a simple vista que existe una gran periodicidad pues la trayectoria en el espacio de fases vuelve a estados previos continuamente. Para ser más riguroso, se ha aplicado análisis por cuantificación de recurrencias.

Inicialmente, se han obtenido los parámetros óptimos para llevar a cabo esta técnica. Mediante el algoritmo de falsos vecinos, se han elaborado los siguientes histogramas, donde se observa que a partir de  $m=5$  el porcentaje de vecinos falsos más cercanos está por debajo del 5%. De esta forma, una dimensión de embebido de  $m=5$  se postula como adecuada.

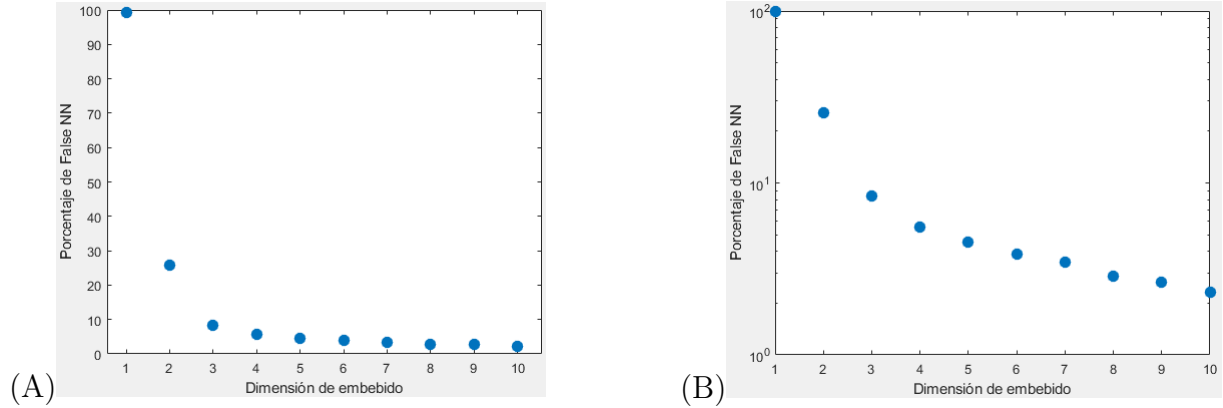


Figura 3.3: Histogramas del porcentaje de vecinos falsos más cercanos frente a la dimensión de embebido en escala lineal (A) y logarítmica (B).

La función de información mutua ha provisto un tiempo de retardo adecuado de  $\tau=5$  y además se tiene una frecuencia de muestreo de  $dt=0.03$  s. Teniendo en cuenta estas variables, se han representado los siguientes *plots* de recurrencia para distintas tasas de recurrencia:

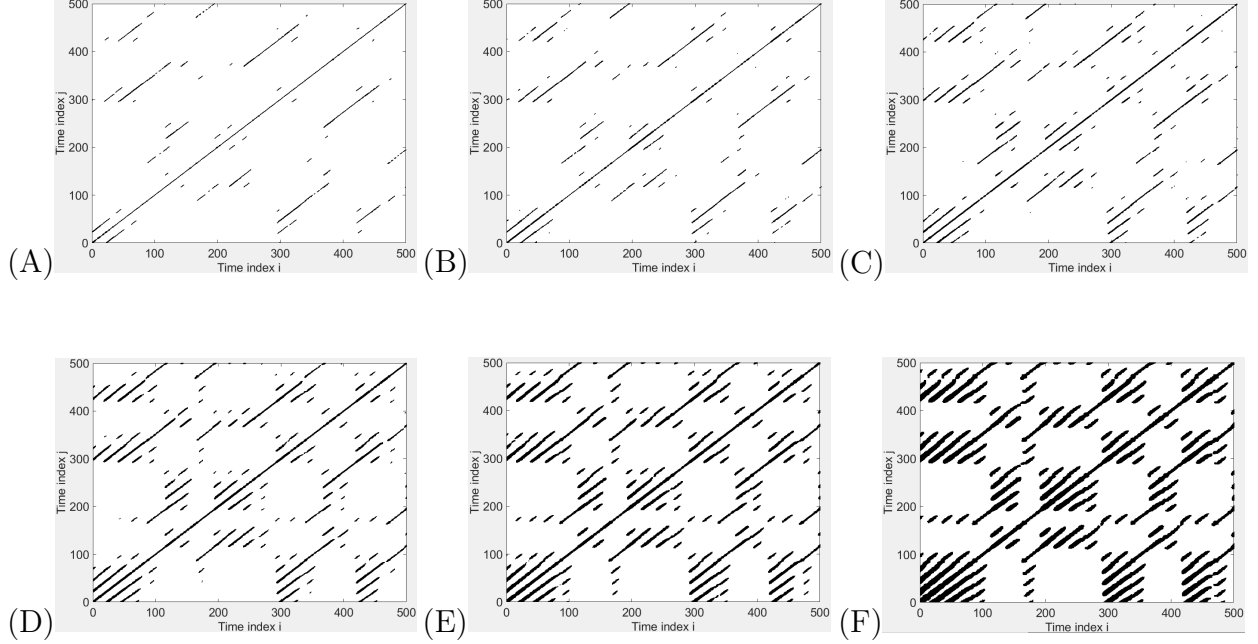


Figura 3.4: *Plots* de recurrencia del atractor de Lorenz para tasas de recurrencia de 0.005 (A), 0.01 (B), 0.02 (C), 0.04 (D), 0.08 (E) y 0.16 (F). Las gráficas se han llevado a cabo para los siguientes parámetros del atractor:  $a=10$ ,  $b=28$ ,  $c=8/3$  y las siguientes condiciones iniciales:  $x(0)=8$ ,  $y(0)=8$ ,  $z(0)=15$ . La dimensión de embebido es  $m=5$ , el tiempo de retardo  $\tau=5$  y la frecuencia de muestreo  $dt=0.03$  segundos.

Se observa que es un sistema con un gran determinismo y por lo tanto, relativamente periódico. Incluso para la tasa de recurrencia mínima ( $RR=0.005$ ) se observan estructuras diagonales en el *plot* de recurrencia. Para tasas de recurrencia más altas, el determinismo se acentúa considerablemente, estableciendo que el sistema es recurrente durante gran parte de su recorrido. Aun así, estos extremos no reproducen fielmente la realidad ya sea por escasez o por exceso de recurrencias. El atractor de Lorenz con estos parámetros es un sistema bastante periódico, pero sin olvidar que sigue siendo caótico. Un valor de la tasa de recurrencia acorde con lo esperado estaría en el intervalo  $RR=0.04-0.08$ .

El análisis por cuantificación de recurrencias ha de ser capaz de diferenciar entre un atractor que utiliza unos parámetros y el mismo atractor con otros parámetros totalmente diferentes. Para dar cuenta de ello, se ha cambiado el parámetro  $b=28$  por un valor de  $b=100$ . De esta forma, se ha obtenido el siguiente *plot* de recurrencia:

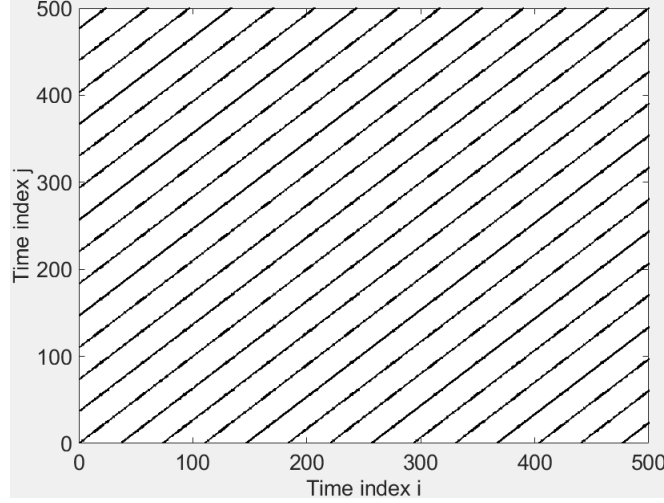


Figura 3.5: *Plot* de recurrencia del atractor de Lorenz para una tasa de recurrencia del 5 %. La gráfica se ha llevado a cabo para los siguientes parámetros del atractor:  $a=10$ ,  $b=100$ ,  $c=8/3$  y las siguientes condiciones iniciales:  $x(0)=8$ ,  $y(0)=8$ ,  $z(0)=15$ . La dimensión de embebido es  $m=5$ , el tiempo de retardo  $\tau=5$  y la frecuencia de muestreo  $dt=0.03$  segundos.

En este cambio del parámetro  $b$ , se observa que el atractor de Lorenz deja de ser un sistema caótico para convertirse en un sistema totalmente periódico. Así se observa en esta última figura, ya que el *plot* está formado por líneas diagonales equiespaciadas en el tiempo.

## 3.2. Atractor de Rössler

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representa a este atractor es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + Ay \\ \frac{dz}{dt} = B + z(x - C) \end{cases} \quad (3.2)$$

Siendo  $A, B$  y  $C$  parámetros libres. Inicialmente, se han cogido los valores más extendidos:  $A=0.2$ ,  $B=0.2$  y  $C=5.7$ .

Resolviendo numéricamente este sistema se ha obtenido la trayectoria de cada coordenada a lo largo del tiempo:

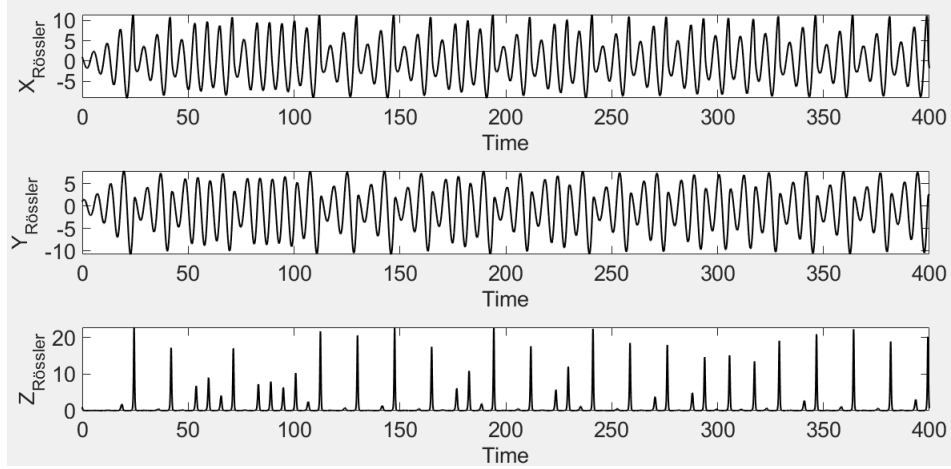


Figura 3.6: Representación de las señales temporales teóricas del atractor de Rössler para las tres coordenadas. Se tiene como parámetros:  $A=0.2$ ,  $B=0.2$  y  $C=5.7$  y como condiciones iniciales:  $x(0)=1$ ,  $y(0)=1$ ,  $z(0)=1$ .

Entonces, se ha obtenido la reconstrucción del espacio de fases:

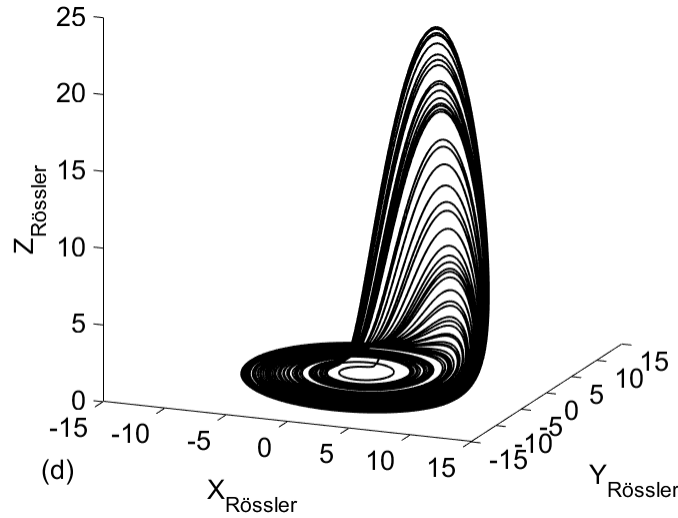


Figura 3.7: Representación de la trayectoria del atractor de Rössler en el espacio tridimensional. Se tiene como parámetros:  $A=0.2$ ,  $B=0.2$  y  $C=5.7$  y como condiciones iniciales:  $x(0)=1$ ,  $y(0)=1$ ,  $z(0)=1$ .

De nuevo, se ha aplicado análisis por cuantificación de recurrencias. En este caso, se han elaborado los *plots* de recurrencia pertenecientes a una dimensión de embebido que va de 1 a 6. El tiempo de retardo obtenido mediante la función de autocorrelación es de  $\tau=5$  y la frecuencia de muestreo es de  $dt=0.05$  segundos. Además, se ha fijado una tasa de recurrencia del  $RR=5\%$ .

Es importante tener en cuenta que a pesar de tener los mismos parámetros de la dimensión de embebido y del tiempo de retardo para dos análisis de una misma señal, el *plot* de recurrencia será distinto si el paso temporal también lo es. Por ejemplo, si para dos análisis de una

misma señal, se han cogido los mismos parámetros (tiempo de retardo, umbral, dimensión de embebido), pero se ha tomado  $dt=0.01$  segundos para el primero y  $dt=0.02$  segundos para el segundo, el *plot* de recurrencia será diferente porque la reconstrucción del espacio de fases también lo será. Por lo tanto, las recurrencias también tendrán lugar en puntos distintos o incluso aparecerán algunas nuevas o desaparecerán algunas que antes ya existían.

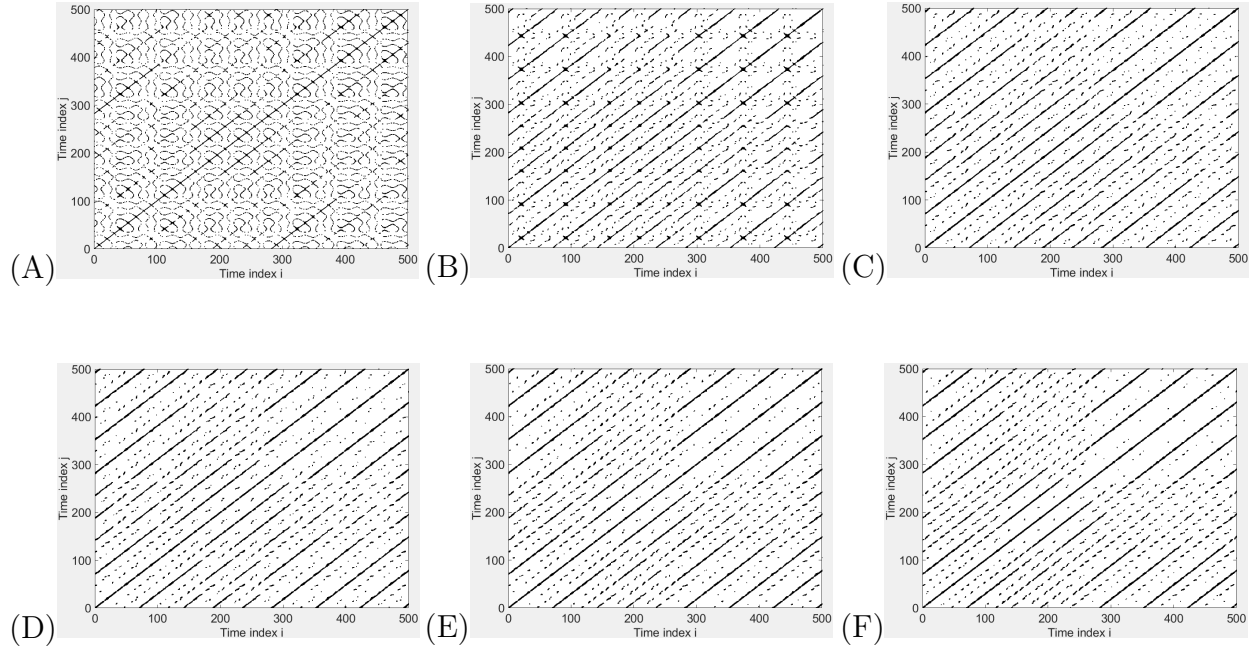


Figura 3.8: *Plots* de recurrencia del atractor de Rössler para una dimensión de embebido de 1 (A), 2 (B), 3 (C), 4 (D), 5 (E) y 6 (F). Las gráficas se han llevado a cabo para los siguientes parámetros del atractor:  $A=0.2$ ,  $B=0.2$  y  $C=5.7$  y las siguientes condiciones iniciales:  $x(0)=1$ ,  $y(0)=1$ ,  $z(0)=1$ . La tasa de recurrencia es  $RR=0.05$ , el tiempo de retardo  $\tau=5$  y la frecuencia de muestreo  $dt=0.05$  segundos.

Para una dimensión de embebido de  $m=1$ , se observa que el número de falsos vecinos más cercanos es considerablemente grande ya que se han generado estructuras recurrentes curvilíneas que desaparecen para una dimensión  $m$  mayor. En torno a  $m=2$  el número de estructuras diagonales se acentúa considerablemente, pero es todavía excesivo. No es hasta una dimensión de  $m=4$  cuando los *plots* de recurrencia posteriores marcan un patrón marcadamente similar. De esta forma, a través del análisis por cuantificación de recurrencias se confirma el resultado del algoritmo de falsos vecinos más cercanos por el que una dimensión de embebido apropiada para analizar estos atractores es  $m=4$  o  $m=5$ .

## Capítulo 4

# Señales experimentales de la máquina lineal de plasma de Santander

Una vez aplicada esta técnica de análisis a casos teóricos, se ha procedido a utilizarla en un caso más experimental: en señales de la máquina lineal de plasma de la Universidad de Cantabria.

### 4.1. Dispositivo experimental

La máquina lineal de plasma de la Universidad de Cantabria es un dispositivo lineal donde se produce plasma mediante la inyección axial de microondas. Ésta tiene la siguiente apariencia:



Figura 4.1: Dispositivos de la máquina lineal de plasma de la Universidad de Cantabria en funcionamiento.



Para generar plasma, se utiliza un magnetrón. Éste es un instrumento que convierte la energía eléctrica en energía electromagnética en forma de microondas. Éstas microondas son emitidas contra un gas (helio, neón, argón) en una cámara de vacío y, como consecuencia, se forma el plasma. El plasma se produce en un tubo de geometría cilíndrica de 100 centímetros de longitud y 7 centímetros de diámetro.

La emisión de microondas tiene lugar mediante una unión *turnstile*. Este dispositivo se basa en una red de 6 terminales eléctricos y dos brazos de guía rectangular acoplados a una guía cilíndrica. Estos brazos se sitúan antes de un polarizador que permite variar la polarización de las ondas incidentes. Todo el plasma se encuentra bajo la acción de un campo magnético del orden de decenas de miliTeslas generado por 6 bobinas por las que pueden circular hasta 200 amperios. Cada bobina tiene un diámetro interior de 23 centímetros, un diámetro exterior de 40 centímetros y un peso de 25 kilogramos, y todas ellas se refrigeran mediante un sistema de agua para impedir que se calienten demasiado. Para medir el campo magnético, se utiliza una sonda basada en el efecto Hall.

Seguido del magnetrón se posiciona un circulador, el cual impide el rebote de las microondas hacia el propio magnetrón. Así se evitan posibles daños que puedan producirse sobre el generador de las propias microondas.

En cuanto a los sistemas de vacío y de admisión de gases, se componen de una bomba de vacío, de una válvula de admisión de gas, de una válvula de compuerta y de un sistema de distribución de gases. La bomba de vacío es capaz de obtener un vacío de  $10^{-7}$  milibares. Un poco antes de que se produzca la descarga, la válvula de compuerta se cierra y entonces se inyecta el gas. Para ello, se dispone de una reserva de gases nobles conectada a la válvula electromagnética de entrada que mediante control por ordenador alcanza la presión deseada dentro de la cámara. El tiempo demandado para un vacío adecuado al realizar las descargas es de 24 horas y entre descarga y descarga de 1.5 minutos.

El diagnóstico que tiene lugar en esta máquina es el de interferometría de microondas. Éste mide el desfase que tiene lugar entre una onda que atraviesa una cuerda del plasma y otra que, con la misma frecuencia, atraviesa el aire. Entonces los dos haces se recombinan en un detector donde interfieren constructiva o destructivamente. De esta forma, se obtiene información acerca de la densidad del plasma.

Para realizar el análisis de las propiedades de los plasmas se emplea la sonda de Langmuir. Ésta se utiliza para determinar la densidad electrónica, la temperatura y el potencial eléctrico de un plasma. Su funcionamiento consiste en posicionar un electrodo en el plasma y aplicar un potencial eléctrico entre este y la nave con la sonda, de forma que al medir la corriente y el potencial se pueden determinar las propiedades anteriores. En función de qué propiedad se mida, se tiene una configuración distinta de esta sonda. Para medir la temperatura y la

densidad electrónica, se utiliza el montaje de triple sonda, donde hay una sonda para la corriente, otra para el potencial y otra para el potencial flotante. Éste último es la diferencia de potencial entre la cámara exterior y el potencial en el que se encuentra la sonda en el plasma. Éste potencial se mide utilizando una única sonda Langmuir [18].

## 4.2. Análisis de señales

Como se ha dicho, la técnica de análisis por cuantificación de recurrencias es una herramienta atractiva para diferenciar entre sistemas caóticos y sistemas deterministas e incluso para cuantificar la periodicidad de éstos. Hoy día, uno de los retos en fusión nuclear consiste en entender los distintos tipos de transporte que tienen lugar en el plasma durante el confinamiento magnético. El transporte difusivo se caracteriza por su aleatoriedad; sigue un camino randomizado. Para entenderlo, se supone una partícula en una dimensión. Como su movimiento se asocia con un proceso aleatorio, se puede escoger el lanzamiento de una moneda cada vez que esta partícula realiza un salto. Se tira una moneda imaginaria y si cae en cara la partícula da un paso hacia delante y si lo hace en cruz da un paso hacia atrás. Entonces, se vuelve a tirar la moneda y se realiza otro salto y así consecutivamente. La generalización a las tres dimensiones es trivial. Por su parte, el transporte turbulento se materializa en forma de vórtices por lo que es un transporte muy periódico. Teniendo en cuenta estas características, se ha utilizado esta técnica para analizar distintas señales en la máquina lineal de plasma de la Universidad de Cantabria.

La máquina lineal de plasma utilizada tiene simetría cilíndrica, por lo que las distintas propiedades del plasma varían radialmente. No se han tomado medidas hasta llegado un valor radial de 1 centímetro porque las sondas y el soporte generan grandes perturbaciones en el plasma que hacen que los resultados sean poco fiables. De esta forma, las medidas realizadas tienen lugar una vez que el plasma está en régimen estacionario [17].

Inicialmente, se han representado los flujos radiales de las posiciones más representativas en función del tiempo, ya que éstos dan una idea cuantitativa acerca del transporte radial de las partículas.

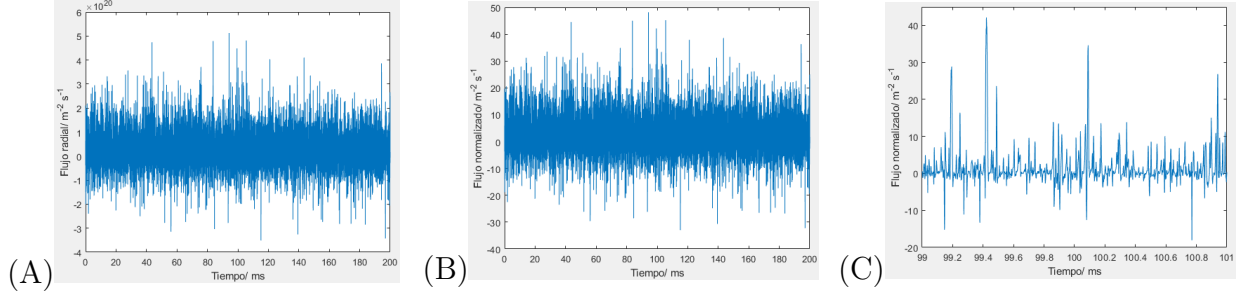


Figura 4.2: Flujo de las partículas del plasma en función del tiempo a una distancia radial de 1 cm para los casos absoluto (A), normalizado (B) y acotado (C).

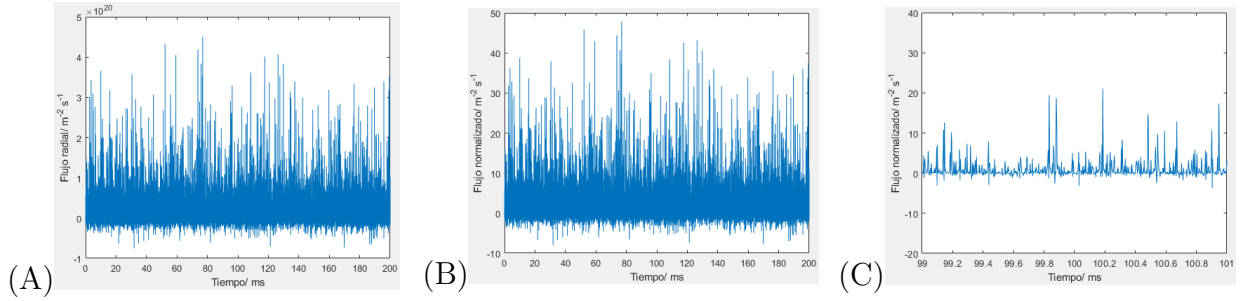


Figura 4.3: Flujo de las partículas del plasma en función del tiempo a una distancia radial de 1.6 cm para los casos absoluto (A), normalizado (B) y acotado (C).

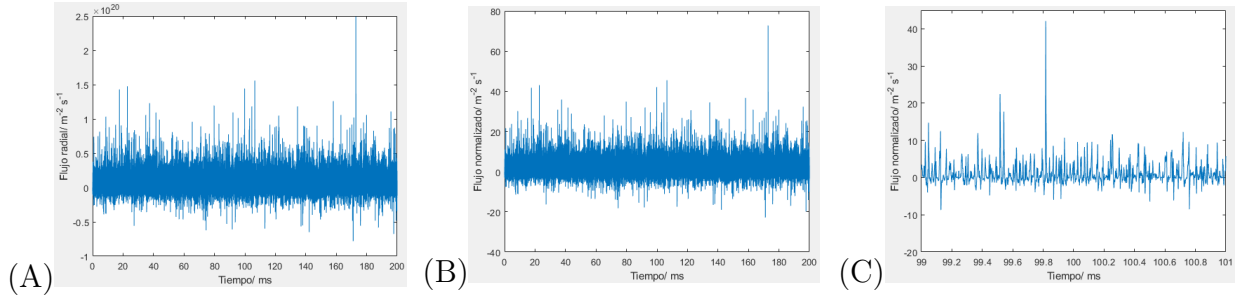


Figura 4.4: Flujo de las partículas del plasma en función del tiempo a una distancia radial de 2.2 cm para los casos absoluto (A), normalizado (B) y acotado (C).

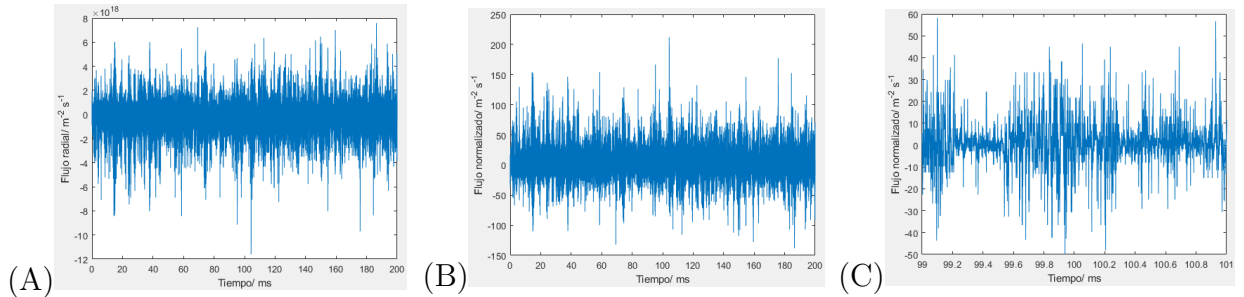


Figura 4.5: Flujo de las partículas del plasma en función del tiempo a una distancia radial de 2.8 cm para los casos absoluto (A), normalizado (B) y acotado (C).

Se puede observar a simple vista que el flujo decrece con la distancia radial pues en la última posición esta propiedad oscila en un intervalo dos órdenes de magnitud menor que en la primera (de  $10^{20}$  a  $10^{18}$ ). Para ser rigurosos, se ha realizado el promedio del flujo para cada distancia radial y se ha representado en función de la posición. Además, también se ha representado la raíz cuadrática media normalizada del flujo en función de la posición radial con el objetivo de vislumbrar las fluctuaciones del flujo.

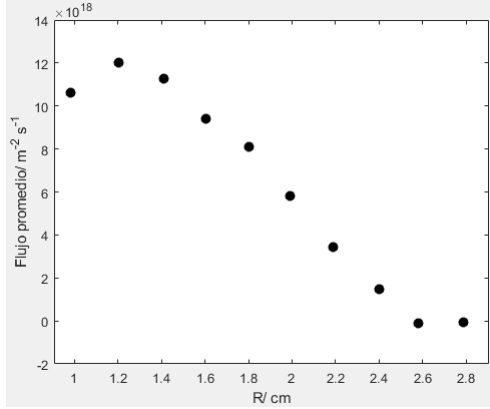


Figura 4.6: Representación del promedio flujo de partículas del plasma en función de la posición radial.

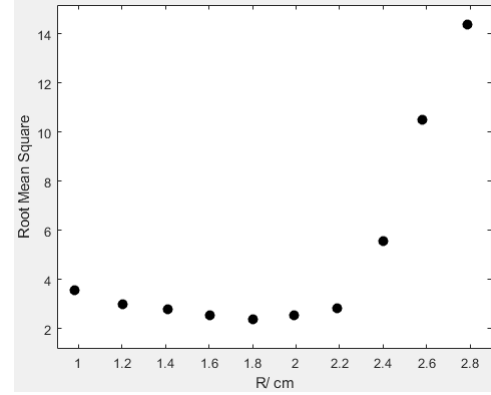


Figura 4.7: Representación de la raíz media cuadrática del flujo en función de la posición radial.

Observando la primera figura, se puede concluir que el flujo promedio decrece con la posición radial hasta hacerse prácticamente nulo. Estos flujos promedio son valores positivos por la ley de Fick; al existir gradientes de densidad y de temperatura la difusión tiene lugar hacia el exterior del radio. Los dos últimos flujos promedio son negativos, es decir, que las partículas dominantes son aquellas que van hacia el interior. La razón de que estos flujos sean negativos es puramente estadística, ya que midiendo de nuevo es probable que el flujo salga positivo. La idea principal es que estos flujos son prácticamente nulos en comparación con aquellos correspondientes a distancias radiales inferiores. El hecho de que el flujo decrezca con el radio encaja dentro de la teoría, pues el plasma está sometido a un confinamiento para que no se escape. Por otro lado, cabe destacar que el flujo radial promedio de la última posición ( $r=2.8$  cm) es aparentemente más fluctuante que el resto. Tiene picos más pronunciados con respecto al flujo promedio que el resto. Se puede decir a priori que el transporte en estas posiciones tan exteriores es bastante difusivo, ya que éste se caracteriza por su gran aleatoriedad. Los flujos interiores son más constantes a lo largo del tiempo por lo que se puede achacar al comportamiento recurrente de las turbulencias.

Para cuantificar las fluctuaciones del flujo promedio se ha hecho uso de la raíz cuadrática media. Ésta se expresa mediante la siguiente ecuación.

$$RMS = \frac{< \Gamma(t)^2 >^{1/2}}{|< \Gamma(t) >|} \quad (4.1)$$

En la figura en la que se representa esta propiedad frente al radio (*Figura 4.7*), se observa que es aproximadamente constante hasta una distancia de 2.2 centímetros. A partir de entonces, éste parámetro crece significativamente. Se confirma así que las fluctuaciones del flujo son tanto mayores en las posiciones radiales más exteriores.

Entonces, se ha procedido a realizar propiamente el análisis por cuantificación de recurrencias. Cada una de las señales analizadas consta de 200000 puntos. Para evitar efectos de borde, se han sustraído los 20000 primeros puntos y los 20000 últimos. Los 160000 puntos restantes se han dividido inicialmente en 320 ventanas de 500 puntos cada una. De esta forma, para cada ventana se tiene un diagnóstico. Con esta configuración, se han analizado las correspondientes señales para distintas posiciones radiales, haciendo análisis por cuantificación de recurrencias a cada serie de 160000 puntos independientemente para cada distancia.

Con el objetivo de obtener los parámetros adecuados para realizar análisis por cuantificación de recurrencias a estas señales, se ha realizado un análisis previo. Mediante el algoritmo de falsos vecinos, se ha obtenido que una dimensión de embebido apropiada es  $m=4$ . Para obtener el tiempo de retardo, se ha estudiado la función de autocorrelación para señales de flujo a distancias radiales de  $r=1$  cm,  $r=1.6$  cm y  $r=2.2$  cm. Así, se ha obtenido la siguiente figura.

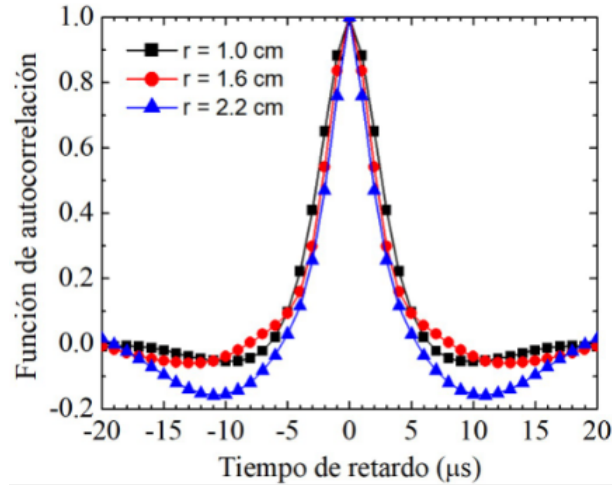


Figura 4.8: Representación de la función de autocorrelación frente al tiempo de retardo.

Analizando esta función (de autocorrelación), el primer mínimo se observa a un tiempo retardo de  $\tau=10 \mu s$ . La frecuencia de muestreo es de  $\nu=1$  MHz y por lo tanto el periodo es de  $1 \mu s$ , de forma que el tiempo de retardo es  $\tau=10$  puntos. Es importante resaltar que un tiempo de retardo de  $\tau=5$  y un periodo de muestreo de  $2 \mu s$  sería un caso equivalente al

presentado en este análisis, ya que daría un tiempo de  $\tau=10 \mu s$ . En cuanto al umbral, puede ser conflictivo fijarlo a una distancia en concreto, ya que en una determinada señal se puede dar un orden recurrente exagerado o una visible falta de éste. Para evitar estos problemas, se ha fijado una tasa de recurrencia del 5 %, de forma que para cada 100 puntos de la señal, los 5 que más se acerquen a un punto de la trayectoria anterior serán recurrentes. Se ha comenzado elaborando los *plots* de recurrencia del punto radial inicial, de dos puntos intermedios y del punto final, cada uno separado del siguiente 0.6 centímetros. De las 320 ventanas correspondientes a cada distancia, se ha cogido una al azar, ya que la dinámica es similar en cada una de ellas.

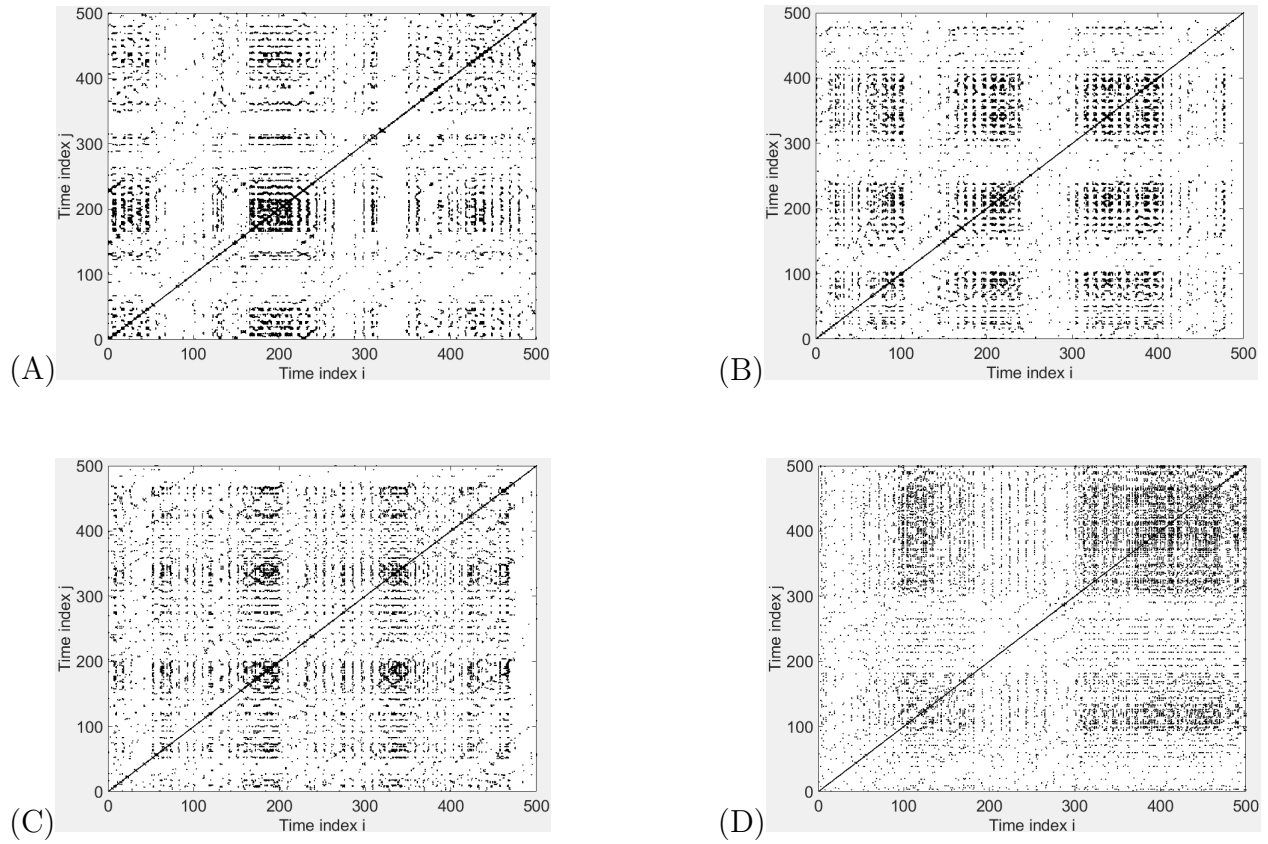


Figura 4.9: *Plots* de recurrencia para una distancia radial de  $r=1$  cm (A),  $r=1.6$  cm (B),  $r=2.2$  cm (C) y  $r=2.8$  cm (D). Se tiene un tiempo de retardo de  $\tau=10$ , una dimensión de embebido de  $m=4$  y una tasa de recurrencia de  $RR=5\%$

En la primera posición radial se observa un determinismo y una laminaridad razonablemente altos; existen estructuras diagonales y verticales claramente diferenciadas. La siguiente distancia radial muestra un número mayor de estructuras recurrentes pero éstas están menos diferenciadas (más espaciadas) que en la figura anterior. Aun así, existe todavía un gran orden diagonal y vertical. La tercera posición radial muestra un gran descenso del determinismo y

de la laminaridad, pues se observa una gran distribución de puntos con pequeñas estructuras deterministas y laminares para valores temporales intermedios. En la última distancia radial, el *plot* de recurrencia es una distribución de puntos aleatoriamente repartidos por toda la ventana de forma que no existen líneas diagonales ni verticales ni por prolongación determinismo ni laminaridad. De esta forma, se puede asegurar que en el interior del plasma hay predominancia de algún tipo de transporte turbulento mientras que en el exterior es totalmente difusivo.

Como la dinámica en las 320 ventanas asociadas a una distancia radial es similar, se puede coger el promedio de las propiedades (determinismo, laminaridad, entropía, media de la longitud diagonal y media de la longitud vertical) medidas en estas ventanas. De esta forma, se ha promediado el determinismo y la laminaridad para las distintas distancias radiales. Además, para comprobar la influencia del tamaño de la ventana estas propiedades se han promediado para ventanas de 1000 y 2000 puntos también.

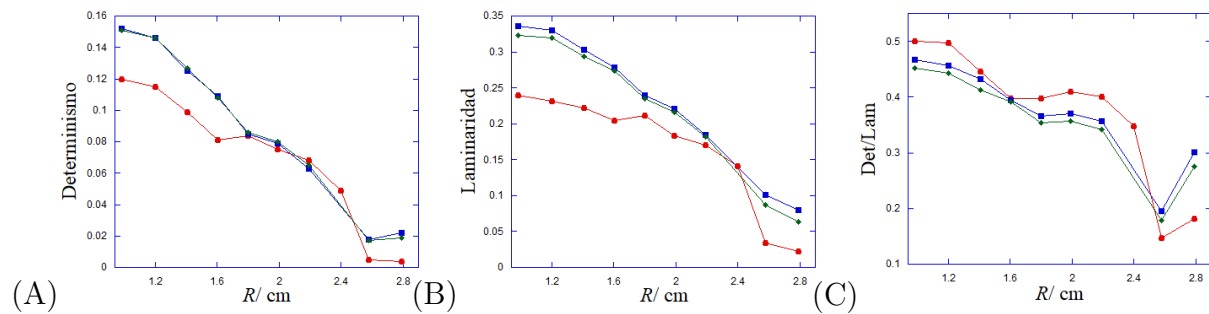


Figura 4.10: Representación del determinismo (A), de la laminaridad (B) y del cociente del determinismo entre la laminaridad (C) en función de la distancia radial para ventanas de 500 (círculos rojos), de 1000 (rombos verdes) y de 2000 puntos (cuadrados azules).

Tal y como se observa en la primera representación, se puede concluir que el determinismo decrece a medida que aumenta la distancia radial. A grandes distancias el determinismo es prácticamente nulo y por lo tanto el transporte es difusivo. En cambio a pequeñas distancias el determinismo alcanza valores intermedios; en torno a 0.1. En este rango de distancias es complicado afirmar con seguridad lo que pasa, pero se puede teorizar que tiene lugar una mezcla entre transporte difusivo y alguna clase de turbulencia. En cuanto a la laminaridad, tiene un comportamiento similar al determinismo; toma valores intermedios para valores radiales pequeños; en torno a 0.25 en este caso, y según se avanza ésta decrece hasta hacerse prácticamente nula en el exterior. Ésta cuantifica el tiempo que un sistema permanece en reposo (considerado como un estado recurrente). De esta forma, se observa que el sistema permanece bastante estático en las primeras posiciones radiales mientras que en el exterior el transporte es continuo, hecho íntimamente relacionado con el alto grado de difusión en los extremos del plasma. En la figura de la derecha se ha realizado una representación del cociente

del determinismo y la laminaridad en función de la distancia radial. En ésta se observa, que el cociente toma valores siempre menores que la unidad de forma que la laminaridad es siempre más grande que el determinismo. Inicialmente el cociente está comprendido en el intervalo 0.4-0.5 para luego acabar decreciendo a valores cercanos a 0.1. De esta forma, en los *plots* de recurrencia pertenecientes a las distancias radiales más interiores se tienen aproximadamente dos líneas verticales (laminaridad) por cada línea diagonal (determinismo). Sin embargo, para las distancias radiales más exteriores la laminaridad decrece en menor medida que el determinismo y por lo tanto se tienen en torno a diez líneas verticales por cada línea diagonal en los *plots* de recurrencia. Así, el sistema tiende a estar en reposo de forma mucho más continuada que a estar en un transporte recurrente, hecho que se acentúa todavía más al avanzar en la distancia radial.

Para visualizar los efectos que puede ocasionar el tamaño de la ventana se han analizado las mismas señales para 320 ventanas de 500 puntos cada una, para 160 ventanas de 1000 puntos cada una y para 80 ventanas de 2000 puntos cada una. En cuanto al determinismo y a la laminaridad, se tiene un comportamiento similar para las tres ventanas consideradas. Los valores aquí promediados tienen una tasa de error, aunque no se haya representado, que es la desviación estándar. Ambas propiedades (determinismo y laminaridad) en las ventanas de 1000 y 2000 puntos están ligeramente por encima de las representadas para ventanas de 500 puntos; en torno a un 0.02 mayor para el determinismo y un 0.05 mayor para la laminaridad. Sin embargo, estas diferencias están cubiertas por la tasa de error establecida. El cociente del determinismo y la laminaridad es menor que 1 para todas las posiciones radiales en cada una de las tres ventanas y decrece de la misma forma a medida que se va hacia el borde. De esta forma, éste es un sistema con un alto grado de reposo, el cual decrece más despacio que el transporte recurrente en las distancias más exteriores.



# Capítulo 5

## Conclusiones

En la actualidad la obtención de energía por fusión nuclear se postula como uno de los grandes retos de la física. Dos núcleos ligeros colisionan para dar lugar a un núcleo más pesado y liberar este tipo de energía. Ésta se caracteriza por ser razonablemente limpia; genera residuos de baja actividad, y por ser segura en términos experimentales. Para ser capaz de producir energía por fusión nuclear se ha de ser capaz de confinar un plasma mientras éste alcanza temperaturas de millones de grados Kelvin. Como se ha dicho, éste es el principal problema: el plasma no está en equilibrio termodinámico y dentro de éste surgen distintos tipos de transporte traducidos en inestabilidades. Para intentar impedir que éstas ocurran, primero se han de comprender y modelizar. En este trabajo, se ha hecho uso de una técnica computacional como es el análisis por cuantificación de recurrencias para distinguir entre los distintos tipos de transporte que tienen lugar en un plasma. Concretamente, esta técnica de análisis se ha orientado a diferenciar entre el transporte turbulento y el transporte difusivo presentes en este estado de la materia cuantificando el grado de periodicidad o de aleatoriedad que tienen estos sistemas.

Se ha comenzado aplicando análisis por cuantificación de recurrencias a dos casos teóricos como son el atractor de Lorenz y el de Rössler. En el atractor de Lorenz, se han elaborado los *plots* de recurrencia para distintas tasas de recurrencia; desde 0.005 hasta 0.16. En estas representaciones, se observa que estos extremos no reproducen fielmente la realidad, pues en el primer caso el umbral es demasiado grande y se obtienen recurrencias bastante escasas y en el segundo el umbral es demasiado pequeño y se obtienen demasiadas estructuras recurrentes. Una tasa de recurrencia adecuada para este atractor es un valor intermedio;  $RR=0.04-0.08$ . Entonces, se ha procedido a cambiar un parámetro del atractor y se ha elaborado un nuevo *plot* de recurrencia para una tasa de recurrencia del 5 %. En este cambio, se ha observado que el sistema pasa de ser caótico a ser completamente periódico. De esta forma, el análisis por cuantificación de recurrencias se postula como una técnica adecuada para discernir las

diferencias de parámetros dentro de un atractor.

En el atractor de Rössler, se han elaborado 6 *plots* de recurrencia esta vez para diferentes dimensiones de embebido. En estas representaciones se ha observado que a partir de una dimensión de  $m=4$ , el *plot* de recurrencia plantea una estructura similar, tal y como pronosticaba el algoritmo de falsos vecinos más cercanos. Así, el análisis por cuantificación de recurrencias también puede ser utilizado sin ningún tipo de problema para hallar la dimensión de embebido de un sistema en sustitución del algoritmo de falsos vecinos más cercanos.

A continuación se ha procedido a analizar las señales de la máquina lineal de plasma de la Universidad de Cantabria para distintas posiciones radiales. Se han obtenido las siguientes conclusiones:

1. A partir de los resultados de la máquina lineal de Santander, se concluye que el flujo promedio de cada distancia radial decrece a medida que la distancia radial aumenta, haciéndose prácticamente nulo en las posiciones más exteriores del detector.
2. Utilizando la *root mean square* (raíz cuadrática media) del flujo, se ha observado que el flujo promedio de cada distancia tiene unos niveles de fluctuación pequeños y constantes hasta una distancia radial de 2.2 centímetros. En las distancias más exteriores que este valor, la fluctuación del flujo promedio crece exponencialmente, es decir, que el flujo se hace considerablemente más fluctuante en las distancias más exteriores de la máquina.
3. El determinismo, tal y como la laminaridad, alcanzan valores intermedios en las distancias radiales más interiores y decrecen con la distancia radial hasta hacerse aproximadamente nulos en el exterior.
4. La laminaridad es en todo momento mayor que el determinismo y esta característica se acentúa con la distancia radial. De esta forma, se favorece que el sistema permanezca más tiempo en un estado de reposo que en un estado de transporte recurrente.
5. El tamaño de la ventana considerado, 500 puntos, no tiene una influencia superflua, ya que el comportamiento de las propiedades analizadas es similar para un tamaño de ventana de 1000 y 2000 puntos.
6. Se concluye que el plasma de la máquina lineal tiene un transporte cuya dinámica es difusiva en las posiciones más externas, mientras que en el interior no está tan claro, aunque hay trazas de una interacción entre los canales de transporte turbulento y difusivo.

# Bibliografía

- [1] Núñez Yépez, H. N., & Salas Brito, A. L. (2013). Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia. *Revista Mexicana de Física*, 91–100. <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v59n2/v59n2a2.pdf>
- [2] Mier, J. A., Sánchez, R., García, L., Varela, J., & Newman, D. E. (2011). Recurrence quantification analysis of simulations of near-marginal dissipative-trapped-electron-mode turbulence. *Physics of Plasmas*, 18(6), 062306. <https://doi.org/10.1063/1.3599437>
- [3] Kozłowski, L. (s. f.). *Shannon entropy calculator — Real example how to calculate and interpret information entropy*. Shannon entropy calculator. Recuperado 26 de mayo de 2021, de <http://www.shannonentropy.netmark.pl/>
- [4] Belaire Franch, J., & Contreras Bayarri, D. (2001, enero). *Recurrence Plots in Nonlinear Time Series Analysis: Free Software* (DT 01–01). Universidad de Valencia. [https://www.uv.es/dep010/2001/dt\\_01\\_01.pdf](https://www.uv.es/dep010/2001/dt_01_01.pdf)
- [5] Fernández, D. G. (2012, septiembre). *Análisis de Recurrencia Visual: Dinámica caótica en los Mercados de Valores mundiales*. Banco Central de Uruguay. <https://www.bcu.gub.uy/Comunicaciones/Jornadas%20de%20Economía/iees03j31111-12.pdf>
- [6] Bennett, C., & Shor, P. (1998). Quantum information theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(6), 2724–2742. <https://doi.org/10.1109/18.720553>
- [7] National Geographic. (2019, 10 agosto). *Plasma: el cuarto estado de la materia*. National Geographic España. [https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/plasma-cuarto-estado-materia\\_14421](https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/plasma-cuarto-estado-materia_14421)
- [8] Echegoyen, P. (2020, junio). *Estudio de la dinámica del transporte turbulento generado por ondas de deriva en plasmas de fusión nuclear*. Universidad de Cantabria.

<https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/20597/Echegoyen%20Ruiz%20Pablo%20Fis%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- [9] Minotti, F. O. (2005, septiembre). *Apuntes de Física del Plasma*. Universidad de Buenos Aires. <https://tecdigital.tec.ac.cr/revista-fisica/Archivo/N10/Materiales/Curso-Fisica-Plasmas.pdf>
- [10] Chaparro Guevara, G. (2008a). *No linealidad, complejidad y sistemas sociales*. Grupo Vórtice, 197–218. <https://revistasoj.s.ucaldas.edu.co/index.php/virajes/article/view/80-8/731>
- [11] Enrique, C. M. (s. f.-b). *El atractor mariposa o atractor de Lorenz*. Boletín de Dinámica de Sistemas. Recuperado 26 de mayo de 2021, de <http://www.dinamica-de-sistemas.com/revista/0907p.htm>
- [12] European Fusion Development Agreement. (2010, junio). *Confinamiento magnético*. [https://www.euro-fusion.org/fileadmin/user\\_upload/Archive/wp-content/uploads/2011/11/energy\\_es.pdf](https://www.euro-fusion.org/fileadmin/user_upload/Archive/wp-content/uploads/2011/11/energy_es.pdf)
- [13] Webmium.com. (s. f.). *Fisión y fusión nuclear*. Conociendo la Química Nuclear. Recuperado 26 de mayo de 2021, de <http://cienciaquimica.webmium.com/>
- [14] Rodríguez Luis, A. (2018, junio). *Estudio de las trayectorias de partículas trazadoras en una pila de arena*. Universidad de Cantabria. <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/15256/Rodriguez%20Luis%20Alvaro%20Fis.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [15] Sánchez Burillo, G. (2010, julio). *Transporte radial de trazadores en simulaciones de turbulencia en plasmas de fusión nuclear*. Universidad Carlos III de Madrid. [https://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/9369/Tesis\\_Guillermo\\_Sanchez.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/9369/Tesis_Guillermo_Sanchez.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- [16] Alonso Otí, P. (2017, septiembre). *Simulaciones de transporte en un sandpile. Analogías con los procesos de transporte de partículas en plasmas de fusión nuclear*. Universidad de Cantabria. <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/12177/PAO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [17] Mier, J. A., Sánchez, R., & Newman, D. E. (2016). *Characterization of a transition in the transport dynamics of a diffusive sandpile by means of*

- recurrence quantification analysis*. Physical Review E, 94(2), 062306–1-062306-062308. <https://doi.org/10.1103/physreve.94.022128>
- [18] Castellanos Ballesteros, O. F. (2007, junio) *Estudio de la turbulencia en un plasma linealmente magnetizado*. Universidad de Cantabria.
- [19] Marwan, N., Romano, M. C., Thiel, M., & Kurths, J. (2007). *Recurrence plots for the analysis of complex systems* (1.<sup>a</sup> ed.). I. Procaccia. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.11.001>
- [20] Kennel, M. B., Brown, R., & Abarbanel, H. D. I. (1992). Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45(6), 3403–3411. <https://doi.org/10.1103/physreva.45.3403>
- [21] Baeza, J. (2020, junio). *Estudio de la actividad del plasma frío a presión atmosférica sobre el biofilm y células planctónicas de Staphylococcus aureus, Pseudomonas aeruginosa y Candida albicans*. Universidad de Valencia. <https://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/76004/TESIS%20JOSE%20BAEZA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

# Apéndice A

## Código

Se han utilizado dos tipos de código. Primero, el código fuente al que se le pasa una señal escalar y devuelve los diagnósticos de RQA y la matriz de recurrencia. Seguidamente, una implementación en el programa Matlab al que se le pasa la matriz de recurrencia y devuelve el *plot* de recurrencia.

### A.1. Código principal

El código se ha desarrollado en la interfaz del supercomputador URANUS. En esta configuración, el lenguaje de programación utilizado ha sido Fortran. Éste código está formado por las subrutinas descritas en la *Figura A.1*.

```
subroutine set
end subroutine set
subroutine stdev
end subroutine stdev
subroutine stdev2
end subroutine stdev2
subroutine getyd
end subroutine getyd
subroutine makerij
end subroutine makerij
subroutine recurrence_rate
end subroutine recurrence_rate
subroutine makepl
end subroutine makepl
subroutine determinism
end subroutine determinism
subroutine average_diagonal_length
end subroutine average_diagonal_length
subroutine entropy
end subroutine entropy
subroutine makepv
end subroutine makepv
subroutine laminarity
end subroutine laminarity
subroutine average_vertical_length
end subroutine average_vertical_length
subroutine output
end subroutine output
```

Figura A.1: Lista de subrutinas del código.

Éste comienza con una subrutina llamada *set* donde se inicializan las variables con las que se trabaja y se leen los archivos *input* que son fundamentalmente señales temporales. Es decir, en esta sección se prepara la configuración con la que se ha de trabajar.

A continuación, la subrutina *getyd* procede a reconstruir la señal escalar que se pasa como *input* mediante el método del tiempo de retardo descrito anteriormente. De esta forma, se reconstruye el espacio de fases de la señal.

```
subroutine getyd
    use param
    use global
    implicit none
    integer :: i,j

    do i=1,ndat-(dim-1)*tau
        do j=1,dim
            yd(i,j)=y(i+(j-1)*tau)
        enddo
    enddo

    write(20, '( "      O U T P U T      P A R A M E T E R S : "/ )'

end subroutine getyd
```

Figura A.2: Subrutina *getyd* del código fuente. Ésta reconstruye el espacio de fases de la señal a través de los datos de la señal escalar que se pasa como input.

Antes de realizar cualquier diagnóstico de análisis por cuantificación de recurrencias, la subrutina *stdev* calcula la desviación estándar de los datos de la señal escalar que se pasa al código. De esta forma, se normalizan estos datos, evitando valores muy dispares entre sí. Además, esta acción permite adaptar el umbral a cada señal.

```

subroutine stdev
    use param
    use global
    implicit none
    integer :: i
    real(IDP) :: sum,mean,std

    sum=0.

    do i=1,ndat
        sum=sum+y(i)
    enddo

    mean=sum/ndat

    sum=0.

    do i=1,ndat
        sum=sum+(mean-y(i))**2
    enddo

    std=sqrt(sum/ndat)

    epsilon=epsilon*std

    if ( rank == 0 ) then
        write(20, '(' Standard deviation of input data, sigma = ",f10.5)')std
        write(20, '(' Rescaled epsilon (epsilon*sigma),          = ",f10.5//)')epsilon
    end if

end subroutine stdev

```

Figura A.3: Subrutina *stdev* del código fuente. Ésta calcula la desviación estándar de los datos de la señal y reescala el umbral.

Entonces, la subrutina *makerij* calcula la distancia de cada punto de la señal en el espacio de fases con cada uno de los puntos restantes de la trayectoria y se compara con el umbral. Si esta distancia es menor, ese punto se cataloga como recurrencia, sino como espacio en blanco. Las coordenadas de cada punto recurrente en el *plot* de recurrencia se corresponden con los tiempos de los puntos del espacio de fases considerados como recurrentes. De esta forma, se construye la matriz de recurrencia estableciendo un 1 donde haya una recurrencia y un 0 donde no la haya.



```

subroutine makerij

  use param
  use global
  implicit none
  integer :: a,i,j,k
  integer, dimension(2) :: b
  real(IDP) :: modsq,modlsq,mod2sq

  dij=1.e20
  rij=0

  if ( norm == 1 ) then
    do i=1,nwindow
      do j=1,nwindow
        modsq=0.
        do k=1,dim
          modsq=modsq+abs(yd(i+ifirst-1+(rank*nowin_par+(iwin-1))*nwindow,k)-yd(j+ifirst-1+(rank*nowin_par+(iwin-1))*nwindow,k))
        enddo
        if ( modsq < epsilon ) rij(i,j)=1
      enddo
    enddo
  else if ( norm == 2 ) then
    do i=1,nwindow-1
      do j=i+1,nwindow
        modsq=0.
        do k=1,dim
          modsq=modsq+(yd(i+ifirst-1+(rank*nowin_par+(iwin-1))*nwindow,k)-yd(j+ifirst-1+(rank*nowin_par+(iwin-1))*nwindow,k))**2
        enddo
        dij(i,j)=sqrt(modsq)
      enddo
    enddo
    do i=1,int(0.01*rrate*nwindow*(nwindow-1)/2)
      b=minloc(dij)
      rij(b(1)-1,b(2)-1)=1
      dij(b(1)-1,b(2)-1)=1.e20
    enddo
  enddo

```

Figura A.4: Subrutina *makerij* del código fuente. Ésta construye la matriz de recurrencia analizando las recurrencias que tienen lugar en espacio de fases. Tiene 3 variantes en función de qué norma se quiere: mínima, máxima o euclidiana.

Después, se calcula la tasa de recurrencia mediante la subrutina *recurrence\_rate*. Ésta calcula el cociente del número de puntos recurrentes y el número de puntos de la ventana.

```

subroutine recurrence_rate

  use param
  use global
  implicit none
  integer :: i,j

  nones=0
  nones2=0

  do i=1,nwindow-1
    do j=i+1,nwindow
      if ( rij(i,j) == 1 ) then
        nones=nones+1
        if ( j-i > omega ) nones2=nones2+1
      endif
    enddo
  enddo

  rr=2.*real(nones)/real((nwindow*(nwindow-1)))
  rr2=real(nones2)/real((nwindow-omega)*(nwindow-omega-1)/2.)
  ann=real(nones)/real(nwindow-1)
  rr_time(iwin)=rr
  rr_timeb(iwin)=rr2

  write(20,('      Window ["',i8,i8,""]'//,' Recurrence Rate (%)',          RR = ',f7.2)') &
    ifirst+(iwin-1)*nwindow,ifirst+iwin*nwindow,100.*rr
  write(20,(' Av. No. of Neighbours,          Nn = ',f7.2)')ann

end subroutine recurrence_rate

```

Figura A.5: Subrutina *recurrence\_rate* del código fuente. Ésta calcula la densidad de puntos recurrentes de la señal.

Posteriormente, la subrutina *makepl* realiza un histograma de las líneas diagonales en el caso de que las hubiera. Es decir, calcula el número de líneas diagonales formadas por distintos

puntos. La idea es que ésta sea una función decreciente aproximadamente lineal: líneas de un punto son todos los puntos, líneas de dos puntos serán igual o menos numerosas que de un punto y así sucesivamente.

```

subroutine makepl

  use param
  use global
  implicit none
  integer :: i,j,k,l,prod

  pl=0
  pl2=0

  do i=1,nwindow-1

    do j=i+1,nwindow

      do l=1,nwindow-max(i,j)+1

        prod=1

        if ( rij(i-1,j-1) == 0 .and. rij(i+1,j+1) == 0 ) then

          do k=0,l-1

            prod=prod*rij(i+k,j+k)

          enddo

          if ( prod == 1 ) then
            pl(l)=pl(l)+1
            if ( j-i > omega ) pl2(l)=pl2(l)+1
          endif

        endif

      enddo

    enddo

  enddo

```

Figura A.6: Subrutina *makepl* del código fuente. Ésta calcula la distribución de líneas diagonales.

Como se observa en el código, se calculan 2 distribuciones. La razón es el efecto anteriormente descrito como movimiento tangencial. Éste es un artefacto matemático por el cual en un *plot* de recurrencia las líneas cercanas a la diagonal principal tienden a ser más anchas y más largas de lo que realmente son y por lo tanto se pierde resolución. Para solucionarlo, se calcula la distribución para todos los puntos exceptuando aquellos que están cerca de la diagonal. Por norma general, se eliminan los 4 primeros. Teniendo en cuenta que las ventanas más usuales tienen como mínimo 500 puntos, la diferencia es infinitésima. Esta orden se extiende a todas las demás propiedades analizadas.

A partir de esta distribución, la subrutina *determinism* calcula el determinismo como el cociente del número de puntos recurrentes en las líneas diagonales entre todos los puntos recurrentes (ecuación del determinismo).

```

subroutine determinism

  use param
  use global
  implicit none
  integer :: i

  length_p1=0
  length_p2=0

  do i=dia_min,nwindow-1

    length_p1=length_p1+i*p1(i)
    length_p2=length_p2+i*p2(i)

  enddo

  det=real(length_p1)/real(nones)
  det2=real(length_p2)/real(nones2)
  det_time(iwin)=det
  det_timeb(iwin)=det2
  if ( rank == 3 ) write(20,(' Determinism,                DET = ",i10,10f8.3')iwin,det,det2,det_time,det_timeb

end subroutine determinism

```

Figura A.7: Subrutina *determinism* del código fuente. Ésta calcula el determinismo de la señal.

Una vez calculado el determinismo, el siguiente paso es calcular la media de la longitud diagonal mediante la subrutina *average\_diagonal\_length*.

```

subroutine average_diagonal_length

  use param
  use global
  implicit none
  integer :: i

  number_dia_lines=0
  number_dia_lines2=0
  lmax_dia=0
  lmax_dia2=0

  do i=dia_min,nwindow-1

    number_dia_lines=number_dia_lines+p1(i)
    number_dia_lines2=number_dia_lines2+p2(i)
    if ( p1(i) /= 0 ) lmax_dia=i
    if ( p2(i) /= 0 ) lmax_dia2=i

  enddo

  length_dia=real(length_p1)/real(number_dia_lines)
  length_dia2=real(length_p2)/real(number_dia_lines2)
  length_dia_time(iwin)=length_dia
  length_dia_timeb(iwin)=length_dia2
  lmax_dia_time(iwin)=lmax_dia
  lmax_dia_timeb(iwin)=lmax_dia2
  write(20,(' Av. diagonal line length,      L_dia = ",f7.2)')length_dia
  write(20,(' Longest Diagonal line,      Lmax_dia = ",i4)')lmax_dia
  write(20,(' Divergence,                DIV = ",f10.5)')1./real(lmax_dia)

end subroutine average_diagonal_length

```

Figura A.8: Subrutina *average\_diagonal\_length* del código fuente. Ésta calcula la media de la longitud diagonal del *plot* de recurrencia.

Con la ecuación anteriormente descrita, la subrutina *entropy* calcula la entropía del sistema.

```

subroutine entropy
    use param
    use global
    implicit none
    integer :: i

    probl=real(p1)/real(number_dia_lines)
    probl2=real(p12)/real(number_dia_lines2)
    entr=0.
    entr2=0.

    do i=dia_min,nwindow-1

        if ( p1(i) /= 0 ) entr=entr+probl(i)*log(probl(i))
        if ( p12(i) /= 0 ) entr2=entr2+probl2(i)*log(probl2(i))

    enddo
    entr_time(iwin)=entr
    entr_timeb(iwin)=entr2
    write(20,'(" Entropy,                               ENTR = ",f7.2)')-entr
end subroutine entropy

```

Figura A.9: Subrutina *entropy* del código fuente. Ésta calcula la entropía de la señal.

Al igual que con las líneas diagonales, se sigue el mismo procedimiento para las líneas verticales. Primero se calcula la distribución de éstas líneas con la subrutina *mavepv*.

```

integer :: i,j,k,l,prod
pv=0
pv2=0

do i=1,nwindow-1

    do j=i+1,nwindow

        do l=1,nwindow-j+1

            prod=1

            if ( ( rij(i,j-1) == 0 .and. rij(i,j+1) == 0 ) .or. &
                ( rij(i,j-1) == 1 .and. j == i+1 .and. rij(i,j+1) == 0 ) ) then

                do k=0,l-1

                    prod=prod*rij(i,j+k)

                enddo

                if ( prod == 1 ) then
                    pv(l)=pv(l)+1
                    if ( j-i > omega ) pv2(l)=pv2(l)+1
                endif

            end if

        enddo

    enddo

enddo

end subroutine makepv

```

Figura A.10: Subrutina *mavepv* del código fuente. Ésta calcula la distribución de líneas verticales de la señal.

A continuación, la subrutina *laminarity* calcula la laminaridad con la ecuación anteriormente descrita (razón del número de puntos recurrentes formando líneas verticales y el número total de puntos recurrentes).

```

subroutine laminarity

    use param
    use global
    implicit none
    integer :: i

    length_pv=0
    length_pv2=0

    do i=ver_min,nwindow-1

        length_pv=length_pv+i*pv(i)
        length_pv2=length_pv2+i*pv2(i)

    enddo

    lam=real(length_pv)/real(nones)
    lam2=real(length_pv2)/real(nones2)
    lam_time(iwin)=lam
    lam_timeb(iwin)=lam2
    write(20,'(" Laminarity,                                LAM = ",f7.2)')lam

end subroutine laminarity

```

Figura A.11: Subrutina *laminarity* del código fuente. Ésta calcula la laminaridad de la señal.

Entonces, la subrutina *average\_vertical\_length* estima la media de la longitud vertical.

```

subroutine average_vertical_length

    use param
    use global
    implicit none
    integer :: i

    number_ver_lines=0
    number_ver_lines2=0
    lmax_ver=0
    lmax_ver2=0

    do i=ver_min,nwindow-1

        number_ver_lines=number_ver_lines+pv(i)
        number_ver_lines2=number_ver_lines2+pv2(i)
        if ( pv(i) /= 0 ) lmax_ver=i
        if ( pv2(i) /= 0 ) lmax_ver2=i

    enddo

    length_ver=real(length_pv)/real(number_ver_lines)
    length_ver2=real(length_pv2)/real(number_ver_lines2)
    length_ver_time(iwin)=length_ver
    length_ver_timeb(iwin)=length_ver2
    lmax_ver_time(iwin)=lmax_ver
    lmax_ver_timeb(iwin)=lmax_ver2
    write(20,'(" Av. vertical line length,          L_ver = ",f7.2)')length_ver
    write(20,'(" Longest vertical line,          Lmax_ver = ",i4//)')lmax_ver

end subroutine average_vertical_length

```

Figura A.12: Subrutina *average\_vertical\_length* del código fuente. Ésta calcula la media de la longitud vertical del *plot* de recurrencia.

Finalmente, la subrutina *output* recoge las propiedades analizadas en una tabla y representa la matriz de recurrencia.

```

subroutine output

  use param
  use global
  implicit none
  integer :: i,j,nn
  real(IDP) :: sum1,sum2,sum3,sum4,sum5,sum6,sum7,sum8,sum9,sum10,sum11,sum12,sum13,sum14,&
&stdev1,stdev2,stdev3,stdev4,stdev5,stdev6,stdev7,stdev8,stdev9,stdev10,stdev11,stdev12,stdev13,stdev14

  do i=0,nwindow+1
    write(18,'(50i2)') (rij(i,j),j=0,nwindow+1)
  enddo

  do i=1,ndat
    write(19,'(i15,lpe15.6)') i,y(i)
  enddo

  do i=2,nwindow-1
    write(21,'(2i4)') i,pl(i)
  enddo

  do i=2,nwindow-1
    write(22,'(2i4)') i,pv(i)
  enddo

  do i=1,nowin
    write(23,'(f10.2,i8,6f8.3,2i8,6f8.3,2i8)')time(ifirst+nwindow/2+(i-1)*nwindow),i,100.*rr_time2(i), &
& 100.*rr_time2b(i),det_time2(i),det_time2b(i),length_dia_time2(i),length_dia_time2b(i),lmax_dia_time2(i), &
& lmax_dia_time2b(i),-entr_time2(i),-entr_time2b(i),lam_time2(i),lam_time2b(i),length_ver_time2(i), &
& length_ver_time2b(i),lmax_ver_time2(i),lmax_ver_time2b(i)
  enddo

  Averages and standard deviations

  sum1=0.

```

Figura A.13: Subrutina *output* del código fuente. Ésta calcula representas la matriz de recurrencia y genera los diagnósticos (determinismo, media de la longitud diagonal, laminaridad, media de la longitud vertical, entropía) para todas las ventanas temporales que se quiera.

## A.2. Implementaciones en Matlab

### A.2.1. *Plot* de recurrencia

Una vez calculada la matriz de recurrencia, es necesario representarla en un *plot* de recurrencia. Esta función se ha realizado mediante un *script* en el programa matemático Matlab.

Tal y como se muestra en la *Figura A.14*, a este código se le pasa como *input* un archivo que contiene la matriz de recurrencia calculada con el código fuente. Inicialmente, simplemente se lee la matriz y se describen los ejes y las coordenadas de la representación.

```

fpath='C:\Users\usuario\Documents\TRABAJO FIN DE GRADO\ROAMATLAB\';
N=502; dN=1; Nplot=502;
fname=char('rij_random.dat'); % name of the output file
fid=fopen(strcat(fpath,fname),'r');
[z,count]=fscanf(fid,'%e',[N,N]);
z=z';
a=find(z); % te devuelve las posiciones del vector distintas de 0
figure('position',[10 10 720 675]);
figure('position',[5 5 950 1110]);
figure('position',[1923 3 1170 1118]);
width=0.75;height=0.78; % width and height of plot windows
awidth=0.03; aheight=0.03; % width and height of annotation box
xl=0.15; yl=0.15; % coordinates for plots
axl=0.07; ayl=0.12; % coordinates for annotations
fsz=20; msz=5; % font and marker sizes
xlab='Time index i'; ylab='Time index j'; % axis labels
xtl=0; xt2=100; xt3=200; xt4=300; xt5=400; xt6=500; ytl=0; yt2=100; yt3=200; yt4=300; yt5=400; yt6=500; % x and y tick labels
mfac=1.;
subplot('Position',[xl yl width height]);
hold on;

```

Figura A.14: Primera parte del *script* que dibuja el *plot* de recurrencia.

Entonces, tiene lugar la representación realizando un bucle que toma como paso la ventana temporal establecida. Este bucle representa primero el triángulo superior, luego el triángulo inferior y finalmente la diagonal principal (LOI). Dentro de este bucle, se pinta un punto en aquella ventana donde la matriz tenga un 1 y se deja en blanco donde tenga un 0.

```

for i=1:dN:length(find(z))
    plot(mfac*floor(a(i)/N),mfac*mod(a(i)-1,N),'k','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',msz); %TRIÁNGULO SUPERIOR
    plot(mfac*mod(a(i),N)-mfac,mfac*floor(a(i)/N),'k','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',msz);
end
for i=mfac:mfac:mfac*(Nplot-2)
    plot(i,i,'k','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',msz); %DIAGONAL
end
axis([0 mfac*(Nplot-2) 0 mfac*(Nplot-2)]);
set(gca,'FontName','Arial','FontSize',fsz);
xlabel('Time index i','FontName','Arial','FontSize',fsz);
ylabel('Time index j','FontName','Arial','FontSize',fsz,'Rotation',90);
xticks([xtl xt2 xt3 xt4 xt5 xt6]); yticks([yt1 yt2 yt3 yt4 yt5 yt6]);
%annotation('textbox',[axl ayl awidth aheight],'String',(a),'FontSize',fsz,'LineStyle','none');
box on;
hold off;

```

Figura A.15: Segunda parte del *script* que dibuja el *plot* de recurrencia.

### A.2.2. Resolución numérica del atractor de Lorenz

El *script* comienza haciendo una llamada a la ecuaciones del atractor declaradas en otro *script* (este es un caso trivial) y estableciendo los parámetros y las condiciones iniciales. Entonces se procede a la resolución numérica de estas ecuaciones mediante el método de Runge-Kutta.

```

%filepath='C:\Users\Administrador\Dropbox\investigacion\rqa\lorenz_system\';
filepath='C:\Users\usuario\Documents\TRABAJO FIN DE GRADO\ATRACTOR DE LORENZ\';
plot_type=1; % 1 for 3d_plot, 2 for x, y, z individual plots.
niter1=10001; % elements of the output file
xpl=zeros(niter1,3);
fname1=char('lorenz1.dat'); % name of the output file
fname2=char('lorenz2.dat'); % name of the output file
Beta1 = [10; 28; 8/3]; % chaotic values
x01 = [8; 8; 15]; % initial conditions
dt1 = 0.005;
tspan1 = dt1:dt1:niter1*dt1;
options1 = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12*ones(1,3));
[t1,x1] = ode45(@(t1,x1)lorenz(t1,x1,Beta1),tspan1,x01,options1);
rng('shuffle');
eps1=0.; % strength of the noise
for i=1:niter1
    xpl(i,1)=x1(i,1)+eps1*(-1.+2*rand);
    xpl(i,2)=x1(i,2)+eps1*(-1.+2*rand);
    xpl(i,3)=x1(i,3)+eps1*(-1.+2*rand);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fid1 = fopen(strcat(filepath,fname1),'w'); % Saving output data to file
fid2 = fopen(strcat(filepath,fname2),'w'); % Saving output data to file
for i=1:niter1
    fprintf(fid1,'%16.4e%16.4e%16.4e%16.4e%16.4e\n',i-1,(i-1)*dt1,x1(i,1),x1(i,2),x1(i,3));
    fprintf(fid2,'%16.4e %16.4e %16.4e %16.4e %16.4e\n',i-1,(i-1)*dt1,xpl(i,1),xpl(i,2),xpl(i,3));
end

```

Figura A.16: Primera parte del script que resuelve el atractor de Lorenz.

El resto del código está simplemente dedicado a representar la trayectoria del atractor en un sistema de coordenadas tridimensional. Junto con esta trayectoria se realiza la representación de cada coordenada a lo largo del tiempo de forma independiente.

```

    fprintf(fid2,'%16.4e %16.4e %16.4e %16.4e %16.4e\n',i-1,(i-1)*dt1,xpl(i,1),xpl(i,2),xpl(i,3));
end
fclose(fid1);
fclose(fid2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%figure('position',[1923 3 1920 1118]);
figure('position',[5 5 950 1110]);
%figure('position',[10 10 720 675]);
wsize=20;
tmin1=0;tmax1=50;xmin1=-20;xmax1=20;ymin1=-25;ymax1=25;zmin1=0;zmax1=50;
if ( plot_type == 1 )
    subplot('Position',[0.08 0.67 0.38 0.23]);
    plot((0:niter1-1)*dt1,xpl(1:niter1,1),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('X_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
    axis([tmin1 Tmax1 xmin1 xmax1]);xticks([0 10 20 30 40 50]);xticklabels({});yticks([-20 -10 0 10 20]);
    annotation('textbox',[0.005 0.64 0.05 0.05],'String','(a)','FontSize',wsize,'LineStyle','none');
    subplot('Position',[0.08 0.4 0.38 0.23]);
    plot((0:niter1-1)*dt1,xpl(1:niter1,2),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('Y_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
    axis([tmin1 Tmax1 ymin1 ymax1]);xticks([0 10 20 30 40 50]);xticklabels({});yticks([-20 -10 0 10 20]);
    annotation('textbox',[0.005 0.37 0.05 0.05],'String','(b)','FontSize',wsize,'LineStyle','none');
    subplot('Position',[0.08 0.13 0.38 0.23]);
    plot((0:niter1-1)*dt1,xpl(1:niter1,3),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
end

```

Figura A.17: Segunda parte del script que resuelve el atractor de Lorenz.



```

set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
ylabel('Z_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
axis([tmin1 tmax1 zmin1 zmax1]);xticks([0 10 20 30 40 50]);yticks([0 10 20 30 40 50]);
annotation('textbox',[0.005 0.1 0.05 0.05],'String','(c)','FontSize',wsize,'LineStyle','none');
subplot('Position',[0.57 0.16 0.38 0.8]);
plot3(xl(:,1),xl(:,2),xl(:,3),'k','LineWidth',1.5);
set(gca,'color','w','xcolor','k','ycolor','k','zcolor','k');
set(gcf,'color','w');
set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
xlabel('X_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize);
ylabel('Y_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize);
zlabel('Z_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize);
axis([xmin1 xmax1 ymin1 ymax1 zmin1 zmax1]);xticks([-20 -10 0 10 20]);yticks([-20 -10 0 10 20]);zticks([0 10 20 30 40 50]);
view(40,10);
annotation('textbox',[0.52 0.1 0.05 0.05],'String','(d)','FontSize',wsize,'LineStyle','none');

```

Figura A.18: Tercera parte del script que resuelve el atractor de Lorenz.

```

elseif ( plot_type == 2 )
    subplot(3,1,1);
    plot((0:niter1-1)*dt1,xpl(1:niter1,1),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
    xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('X_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
    subplot(3,1,2);
    plot((0:niter1-1)*dt1,xpl(1:niter1,2),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
    xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('Y_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
    subplot(3,1,3);
    plot((0:niter1-1)*dt1,xpl(1:niter1,3),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
    xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('Z_{Lorenz}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
end

```

Figura A.19: Cuarta parte del script que resuelve el atractor de Lorenz.

### A.2.3. Resolución numérica del atractor de Rössler

El procedimiento de ejecución es exactamente el mismo que en el caso del atractor de Lorenz, pero para las ecuaciones del atractor de Rössler. De esta forma, simplemente dejo el código.

```

% fpath='C:\Users\Administrador\Dropbox\investigacion\rq\rossler_system\';
fpath='C:\Users\usuario\Documents\TRABAJO FIN DE GRADO\ATRACTOR DE RÖSSLER\';
plot_type=1; % 1 for all together, 2 for x, y, z individual plots.
niter2=20001; % elements of the output file
xp2=zeros(niter2,3);
fname1=char('rossler1.dat'); % name of the ouput file
fname2=char('rossler2.dat'); % name of the ouput file
Beta2 = [0.2; 0.2; 5.7]; % chaotic values
x02 = [1.; 1.; 1.]; % initial conditions
dt2 = 0.02;
tspan2 = dt2:dt2:niter2*dt2;
options2 = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12*ones(1,3));
[t2,x2] = ode45(@(t2,x2) rossler(t2,x2,Beta2),tspan2,x02,options2);
rng('shuffle');
eps2=0.; % strength of the noise
for i=1:niter2
    xp2(i,1)=x2(i,1)+eps2*(-1.+2*rand);
    xp2(i,2)=x2(i,2)+eps2*(-1.+2*rand);
    xp2(i,3)=x2(i,3)+eps2*(-1.+2*rand);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fid1 = fopen(strcat(fpath,fname1),'w'); % Saving output data to file
fid2 = fopen(strcat(fpath,fname2),'w'); % Saving output data to file
for i=1:niter2
    fprintf(fid1,'%16.4e %16.4e %16.4e %16.4e %16.4e\n',i-1,(i-1)*dt2,x2(i,1),x2(i,2),x2(i,3));
    fprintf(fid2,'%16.4e %16.4e %16.4e %16.4e %16.4e\n',i-1,(i-1)*dt2,xp2(i,1),xp2(i,2),xp2(i,3));
end

```

Figura A.20: Primera parte del script que resuelve el atractor de Rössler.

```

fprintf(fid2,'%16.4e %16.4e %16.4e %16.4e %16.4e\n',i-1,(i-1)*dt2,xp2(i,1),xp2(i,2),xp2(i,3));
end
fclose(fid1);
fclose(fid2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%figure('position',[1923 3 1920 1118]);
figure('position',[5 5 500 500]);
%figure('position',[10 10 720 675]);
wsize=20;
tmin2=0;tmax2=400;xmin2=-15;xmax2=15;ymin2=-15;ymax2=15;zmin2=0;zmax2=25;
if ( plot_type == 1 )
    subplot('Position',[0.08 0.67 0.38 0.23]);
    plot((0:niter2-1)*dt2,xp2(1:niter2,1),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
%    xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('X_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
    axis([tmin2 tmax2 xmin2 xmax2]);xticks([0 100 200 300 400]);xticklabels({});yticks([-15 -10 -5 0 5 10 15]);
    annotation('textbox',[0.005 0.64 0.05 0.05],'String','(a)','FontSize',wsize,'LineStyle','none');
    subplot('Position',[0.08 0.4 0.38 0.23]);
    plot((0:niter2-1)*dt2,xp2(1:niter2,2),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
%    xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('Y_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
    axis([tmin2 tmax2 ymin2 ymax2]);xticks([0 100 200 300 400]);xticklabels({});yticks([-15 -10 -5 0 5 10 15]);
    annotation('textbox',[0.005 0.37 0.05 0.05],'String','(b)','FontSize',wsize,'LineStyle','none');
    subplot('Position',[0.08 0.13 0.38 0.23]);
end

```

Figura A.21: Segunda parte del script que resuelve el atractor de Rössler.

```

subplot('Position',[0.08 0.13 0.38 0.23]);
plot((0:niter2-1)*dt2,xp2(1:niter2,3),'k','LineWidth',1.5);
set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
ylabel('Z_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
axis([tmin2 tmax2 zmin2 zmax2]);xticks([0 100 200 300 400]);yticks([0 5 10 15 20 25]);
annotation('textbox',[0.005 0.1 0.05 0.05],'String','(c)','FontSize',wsize,'LineStyle','none');
subplot('Position',[0.57 0.16 0.38 0.8]);
plot3(x2(:,1),x2(:,2),x2(:,3),'k','LineWidth',1.5);
set(gca,'color','w','xcolor','k','ycolor','k','zcolor','k');
set(gcf,'color','w');
set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
xlabel('X_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize);
ylabel('Y_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize);
zlabel('Z_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize);
axis([xmin2 xmax2 ymin2 ymax2 zmin2 zmax2]);xticks([-15 -10 -5 0 5 10 15]);yticks([-15 -10 -5 0 5 10 15]);zticks([0 5 10 15]);
view(10,15);
annotation('textbox',[0.52 0.1 0.05 0.05],'String','(d)','FontSize',wsize,'LineStyle','none');

```

Figura A.22: Tercera parte del script que resuelve el atractor de Rössler.

```

elseif ( plot_type == 2 )
    subplot(3,1,1);
    plot((0:niter2-1)*dt2,xp2(1:niter2,1),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
    xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('X_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
    subplot(3,1,2);
    plot((0:niter2-1)*dt2,xp2(1:niter2,2),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
    xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('Y_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
    subplot(3,1,3);
    plot((0:niter2-1)*dt2,xp2(1:niter2,3),'k','LineWidth',1.5);
    set(gca,'FontName','Arial','FontSize',wsize);
    xlabel('Time','FontName','Arial','FontSize',wsize);
    ylabel('Z_{Rössler}','FontName','Arial','FontSize',wsize,'Rotation',90);
end

```

Figura A.23: Cuarta parte del script que resuelve el atractor de Rössler.